

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT**

MARCOS BARBOSA DE BARROS

**FUNDAMENTOS DE CONECTIVIDADE PARA O
ENSINO MÉDIO E APLICAÇÕES DOS TEOREMAS DE
MENER E FESTINGER**

**SÃO CRISTÓVÃO—SE
2015**

MARCOS BARBOSA DE BARROS

FUNDAMENTOS DE CONECTIVIDADE PARA O
ENSINO MÉDIO E APLICAÇÕES DOS TEOREMAS DE
MENER E FESTINGER

Dissertação apresentada ao Programa de Pós
Graduação em Matemática da Universidade
Federal de Sergipe, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Ma-
temática.

Orientador: Prof. Dr. André Vinicius dos
Santos Dória

SÃO CRISTÓVÃO—SE

2015

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

B277f Barros, Marcos Barbosa de
Fundamentos de conectividade para o ensino médio e aplicações dos teoremas de Menger e Festinger / Marcos Barbosa de Barros ; orientador André Vinicius dos Santos Dória. – São Cristóvão, 2015.
71 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Teoria dos grafos. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Matemática (Ensino médio). I. Dória, André Vinicius dos Santos, orient. II. Título.

CDU 519.17:37.016

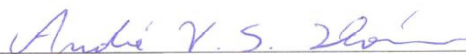
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.


Fundamentos de conectividade para o ensino médio e aplicações dos teoremas de Menger e Festinger.

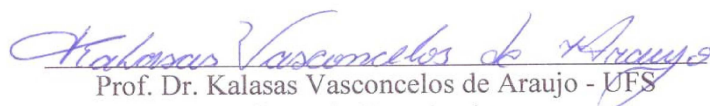
por

Marcos Barbosa de Barros

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. André Vinícius Santos Dória - UFS
Orientador


Prof. Dr. Crislene Santos da Paixão- IFS
Primeiro Examinador


Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araujo - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 10 de agosto de 2015.

Agradecimentos

“... não porque é fácil, mas porque é difícil. Porque aquela meta irá servir para organizar e medir o melhor de nossas energias e habilidades. Porque aquele desafio é um que estamos dispostos a aceitar, um que não estamos dispostos a adiar, e um que pretendemos vencer, e os outros, também.”

Jonh F. Kennedy

- À Deus;
- À minha mãe;
- Ao professor André Vinicius dos Santos Dória, pelo desafio proposto, que com sua generosa paciência e confiança me ajudou a percorrer essa difícil caminhada;
- Aos meus amigos de turma, que tive o privilégio de conhecer e em especial à Marcelo de Jesus Santos, Epifanio Lima Santos e José Roberto (“Alagoano”) grandes companheiros nessa jornada;
- Aos professores, Kalasas Vasconcelos de Araújo e Crislene Santos da Paixão que compuseram a banca examinadora;
- Ao Professor Zaqueu Alves Ramos pelo incentivo e dedicação durante todo o curso;
- Ao Professor Evilson pelas valiosas colaborações prestadas durante a realização deste trabalho no software TEX;
- Aos professores da equipe Profmat que com empenho e dedicação, compartilharam seus conhecimentos e nos deram oportunidade de crescermos como profissionais;
- A Empresa ENERGISA, pelos dados fornecidos, ao qual agradeço ao Diretor Amaury Antônio Damiance, o Assessor de Planejamento Thiago Martins e o Engenheiro de Planejamento Arthur Barbosa Bernardes Ferreira, pelas orientações técnicas sobre a rede de Distribuição de Energia;
- A equipe diretiva do Colégio Estadual Sen. José Alves do Nascimento e da Escola Municipal Oviêdo Teixeira que com muita paciência e generosidade me apoiaram durante o decorrer dos meus estudos;
- A CAPES pela generosa bolsa, essencial para o apoio e desenvolvimento das atividades.

Resumo

A presente dissertação tem como objetivo apresentar aos alunos do ensino médio conceitos matemáticos úteis na análise e resolução de problemas de conectividade, utilizando teoria dos grafos. Após a explanação de conceitos básicos, introduzimos a noção de conexidade, demonstrando o teorema de Menger e apresentamos o teorema de Festinger, que é uma ferramenta útil para contagem de caminhos. Apresentamos também uma aplicação destes conceitos na análise da rede de subdistribuição elétrica do estado de Sergipe. Ao final, concluimos o presente trabalho, propondo algumas sequências didáticas para alunos do ensino médio abordando o teorema de Euler para grafos, os temas sobre conexidade, conectividade, o teorema de Menger e o teorema de Festinger.

Palavras Chaves:

Teoria dos Grafos, Conexidade, Conectividade, Teorema de Menger, Teorema de Festinger.

Abstract

The present dissertation aims to introduce students to high school useful math concepts connectivity problems using graph theory. After the explanation of basic concepts, we introduce the notion of connectedness, Mengers theorem and we present the theorem of Festinger, which is a useful tool for path counts. We also present an application of these concepts in the analysis of electrical sub-distribution network in the state of Sergipe. Finally we conclude this work by suggesting some didactic sequences for high school students addressing the Euler's theorem for graphs, the themes of connectedness, connectivity, Menger's theorem and the theorem Festinger.

Keywords:

Graph Theory, Connectedness, Connectivity, Menger's theorem, Festinger's theorem.

Lista de Figuras

1.1	Pontes de Königsberg	15
1.2	Grafo representando	15
1.3	Exemplo de um Grafo	17
1.4	K_5	19
1.5	Grafo vazio com 5 vértices	20
1.6	Grafo arbitrário G e seu complemento \overline{G}	20
1.7	Grafo 3-regular	21
1.8	Grafo 4-regular	21
1.9	Grafo 3-regular e não completo	21
1.10	Excisão da Aresta vw	23
1.11	Excisão do Vértice v	23
1.12	Ciclos C_3, C_4, C_5 e C_6	24
1.13	Grafo Euleriano	25
1.14	Grafo Hamiltoniano	26
1.15	Jogo Volta ao Mundo	26
1.16	Jogo Volta ao Mundo	26
1.17	Uma Solução do Jogo Volta ao Mundo - Planificado	27
1.18	Grafo Conexo	28
1.19	Grafo Conexo	28
1.20	Grafo Desconexo	28
1.21	Grafo Conexo	28
1.22	Exemplo 1 - Isomorfismo	29
1.23	Exemplo 2 - Isomorfismo	30
1.24	Grafo G e sua Matriz de Adjacência	31
1.25	Componentes Conexas	32
1.26	Link 1	34
1.27	Link 2	34

1.28	Grafos Conexos (a) e (b)	35
1.29	Grafos conexos (c) e (d)	35
1.30	O Grafo conexo à esquerda torna-se desconexo	35
1.31	O Grafo conexo à esquerda torna-se desconexo	36
1.32	Grafos conexos (c) e (d)	36
1.33	O Grafo conexo (c) torna-se desconexo	36
1.34	O Grafo conexo (d) torna-se desconexo	37
1.35	Obtenção de grafo desconexo removendo o vértice w	37
1.36	Obtenção de grafo desconexo removendo o vértice v	38
1.37	Obtenção de grafo desconexo removendo os vértices v e x	38
1.38	Obtenção de grafo desconexo removendo os vértices x e t	39
1.39	Grafo 2—Conexo	40
1.40	Grafos κ —Conexos	40
1.41	Grafos Conexos	41
1.42	Grafos G e \overline{G} , ambos conexos	42
1.43	Grafo - Pontes de Königsberg	43
1.44	Linhas de transmissão e subestações na cidade de Aracaju	47
1.45	Agreste e Sertão Sergipanos	49
1.46	Linhas de Transmissão e Subestações no Estado de Sergipe	51
2.1	Grafo Conexo 1	53
2.2	Ilustração do Teorema de Menger	57
2.3	O grafo G	59
3.1	Grafo Conexo 1	70
3.2	Grafo Conexo 2	70
3.3	Grafo Conexo 3	70
3.4	Grafo Conexo 4	70
3.5	Malha Telefônica	70
3.6	Grafos Completos	71
3.7	Grafo 1	72
3.8	Grafo 2	72
3.9	Grafo 3	72
3.10	Grafo 4	72
3.11	Indústrias	73

Sumário

Introdução	12
1 Preliminares	14
1.1 Breve Histórico	14
1.2 Conceitos Básicos da Teoria dos Grafos	17
1.2.1 Alguns tipos de grafos	19
1.2.2 Subgrafos	22
1.2.3 Passeios, Caminhos e Ciclos	24
1.2.4 Caminho Euleriano e Caminho Hamiltoniano	25
1.2.5 Grafos Isomorfos	28
1.2.6 Matriz de Adjacência	30
1.2.7 Grafos e Componentes Conexas	31
1.3 Conexidade e Conectividade	32
1.3.1 Um exemplo de aplicação	34
1.3.2 Conexidade de Arestas	35
1.3.3 Conexidade de vértices	37
1.3.4 Conectividade	39
1.4 Alguns resultados sobre conectividade de grafos	41
1.4.1 Rede de Subestações Elétricas no Estado de Sergipe - Uma visão do sistema sob a perspectiva da teoria dos grafos	43
2 Os Teoremas de Menger e Festinger	52
2.1 O Teorema de Menger	52
2.2 Contando caminhos entre vértices - Teorema de Festinger	58
3 Contextualizando em sala de aula	61
3.1 Uma prática concebível: Noções de Grafos no Ensino Médio	61

3.2 Oficinas e Material didático sobre grafos para alunos	62
Considerações Finais	74
Referências Bibliográficas	76

Introdução

O currículo de Matemática do Ensino Médio pode ser atualizado com novas contribuições que objetivem o efetivo exercício da interdisciplinaridade e, de forma conveniente tornar mais concreta uma aproximação entre o que se ensina na escola e as situações reais de nosso cotidiano. Dessa forma o trabalho com Grafos torna-se uma solução viável e bastante oportuna. De acordo com Elon Lages (1988, Revista do Professor de Matemática, p.36), “O Conceito de Grafos é simples, porém fértil em aplicações e problemas atraentes”.

Uma dessas aplicações está bem presente em problemas de otimização. O teorema de Menger, que é um resultado básico na teoria de Grafos sobre conexidade estabelece uma forte dualidade entre essas problematizações.

Vários problemas de otimização poderiam dar suporte ao ensino de Grafos em nível elementar no ensino médio. Como exemplo, poderíamos pensar em uma rede de telecomunicações (de forma prática devemos pensar nas várias torres de telefonia celular que compõem o sistema) que precisa manter sua integridade, isto é seu funcionamento, mesmo se uma das torres vier a falhar. Situações como essas podem ser modeladas e resolvidas com o auxílio da Teoria dos Grafos. As aplicações são muitas e podemos citar também o caso de uma indústria de placas de circuitos integrados, onde é vital baratear os custos de produção e neste caso, evitar esquemas de ligação com intersecções das trilhas do circuito eletrônico, ou seja, quanto menos camadas, mais rápido e rentável se tornará o produto.

Após a explanação de conceitos básicos da teoria dos Grafos, introduzimos a noção de conexidade e conectividade, demonstrando o teorema de Menger e apresentando o teorema de Festinger, que é uma ferramenta útil para “contarmos caminhos”. Apresentamos também alguns desses conceitos numa aplicação na análise da rede de sub-distribuição de energia elétrica do estado de Sergipe.

Ao final, concluímos o presente trabalho propondo algumas sequências didáticas para alunos do ensino médio abordando o teorema de Euler para grafos, noções de

grafos eulerianos e hamiltonianos, conexidade e grafos complementares, conectividade e grafos completos, além de atividades aplicando os teoremas de Menger e Festinger.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo introduzirá os conceitos básicos de teoria dos grafos e apresentará inicialmente um breve histórico da teoria destacando os principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento deste importante ramo da matemática.

1.1 Breve Histórico

Os grafos são uma das estruturas mais simples e utilizadas da análise combinatória. Entre as aplicações, que são inúmeras, estão a criptografia, sistemas de redes e otimização de processos.

A teoria dos Grafos é extremamente recente em Matemática. Um artigo (*“Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis”*) apresentado por Euler à Academia de Ciências de St. Petersburgo (atual, Leningrado), onde trabalhava desde 1727 e publicado em 1736, sobre o famoso problema das sete pontes de Königsberg é considerado o trabalho pioneiro em teoria dos grafos. Euler resolveu uma questão que vinha provocando muitas discussões: Os habitantes de Königsberg se perguntavam se seria possível atravessar as sete pontes, sendo que cinco delas dão acesso a uma ilha, como mostra a figura 1.1 sobre o rio Pregel, sem atravessar duas vezes a mesma ponte.

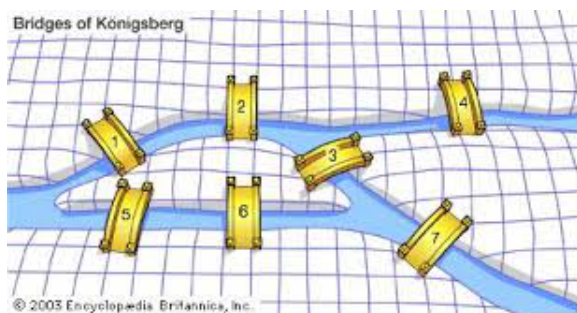


Figura 1.1: Pontes de Königsberg
Fonte: Enciclopedia Britanica

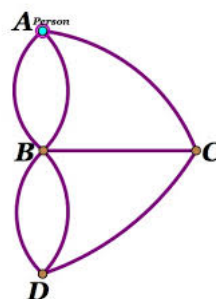


Figura 1.2: Grafo representando
as Pontes de Königsberg

Esse problema dá origem a um grafo com arestas múltiplas. Euler mostrou que a resposta para o problema era negativa, estabelecendo assim uma condição necessária; embora se acredita que a suficiência não lhe fosse desconhecida. Sobre a suficiência deste problema, foi publicada apenas 140 anos depois por Hierholzer em 1873.

É importante observar que o período transcorrido entre a demonstração de Euler e a última década do século *XIX* - mais de 150 anos - viu, apenas o surgimento de alguns poucos trabalhos. Apenas em 1847 Gustav Kirchhof¹ utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos e ao fazê-lo, criou a teoria das árvores, uma classe de grafos, para caracterizar conjuntos de ciclos independentes.

O britânico Arthur Cayley (1821 – 1895) - utilizou a ideia de árvores para outras aplicações tais como a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, em química orgânica.

Em 1879, o matemático inglês Alfred Kempe publicou um artigo provando o teorema das quatro cores - “qualquer grafo planar é 4-colorível”, ou enunciando-o de forma prática - “Dado um mapa plano, dividido em regiões, quatro cores são suficientes para colori-lo de forma que regiões vizinhas não possuam a mesma cor”. Esta prova foi aceita como válida durante mais de uma década até que o matemático britânico Percy Heawood em 1890 mostrou que a prova de Kempe tinha uma falha, no entanto, utilizando parte da demonstração de Kempe, provou que cinco cores são suficientes para colorir qualquer mapa.

A prova para esta conjectura somente foi obtida (com o auxílio de um computador), quase 90 anos depois, em 1976, pelos matemáticos Kenneth Appel (americano)

¹Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), foi um físico alemão. Suas contribuições científicas foram principalmente no campo dos circuitos elétricos. É autor de duas leis fundamentais da teoria clássica dos circuitos elétricos.

conjuntamente com o alemão Wolfgang Haken. Alguns matemáticos afirmam ser esta a prova mais feia de toda a história da matemática.

Nas décadas de 20 e 30 dois resultados importantes foram provados: o austríaco Karl Menger² (1927) demonstrou um importante teorema sobre o problema da desconexão de itinerários em grafos, e o polonês Kuratowski (1930) encontrou uma condição necessária e suficiente para a planaridade de um grafo. Turán (1941) foi o pioneiro do ramo conhecido como teoria extremal de grafos e o britânico Tutte (1947) resolveu o problema da existência de uma cobertura minimal em um grafo, além de numerosas contribuições para a teoria dos grafos. Vale a pena registrar que o termo grafo foi usado pela primeira vez por Sylvester em 1878 e que o primeiro livro específico sobre grafos foi publicado pelo matemático húngaro Denés König em 1936 ("*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*"), uma época na qual, o assunto era ainda incipiente, mas que a partir desta publicação marcou o início de teoria dos grafos como seu próprio ramo da matemática.

Aliás os húngaros formam uma escola bastante forte no desenvolvimento da teoria dos grafos, com nomes importantes tais como: Paul Erdős, László Fejes Tóth, Béla Bollobás, Paul Turán, Gabriel Dirac, Tibor Gallai, Alfred Rényi e János Pach.

Com a publicação dos trabalhos dos americanos Ford e Fulkerson ("*Max-Flow Min-Cut Theorem*") em 1956, do segundo livro sobre teoria dos grafos de autoria do francês Claude Berge ("*Théorie des Graphes et ses applications*") em 1957, além do livro "*Theory of Graphs*" do norueguês Oystein Ore em 1962, o interesse pela teoria dos grafos começou a aumentar, crescendo rapidamente no mundo todo. A imensa maioria dos livros sobre grafos foi publicada depois de 1970, em grande parte sob a influência das obras de Berge e Frank Harary (americano que ficou conhecido como o "*Embaixador da Teoria dos Grafos*"). A escola russa também contribuiu bastante e um dos nomes principais é Alexander A. Zykov.

O desenvolvimento dos computadores levou à publicação de várias obras dedicadas aos algoritmos de grafos, abrindo assim possibilidades crescentes de aplicação e utilização da Moderna Teoria dos Grafos.

²Karl Menger (1902-1985), matemático austríaco. Trabalhou em álgebra, teoria da curva e dimensão, entre outras áreas. Em 1927, apenas com 25 anos de idade, já ocupava a cadeira de titular em Geometria na Universidade de Viena, onde publicou "*Zur allgemeinen Kurventheorie*" - denominado posteriormente como teorema de Menger, mas que na época Menger o referenciou como "*n-arc-theorem*". Devido a situação política na Áustria em 1938 partiu em busca de uma posição nos Estados Unidos e foi convidado a lecionar na Universidade de Notre Dame. Em 1948 se transferiu para Chicago, onde lecionou no Instituto de Tecnologia de Illinois. Menger foi considerado um dos principais matemáticos do século XX.

1.2 Conceitos Básicos da Teoria dos Grafos

Os grafos são estruturas discretas que consistem em vértices e arestas que ligam estes vértices. Diversos problemas, em quase todas as áreas do conhecimento podem ser modelados e resolvidos usando grafos.

Definição 1.2.1. Um grafo G é um par (V, E) de conjuntos tais que $E \subseteq [V]^2$, onde $[V]^2$ denota-se como o conjunto de todos os subconjuntos com 2 elementos de V .

Os elementos do conjunto $V = V(G)$ são os **vértices** (ou nós, ou pontos) do grafo G e os elementos de $E = E(G)$ são as **arestas**³ (ou linhas).

Para muitos propósitos, é conveniente representar um grafo $G = (V, E)$ por uma representação gráfica, onde os elementos de V correspondem a pontos no plano e as arestas de G correspondem a *arcos* ligando os vértices correspondentes.

A maneira como esses pontos e as linhas são desenhados é considerado irrelevante, em geral o que realmente importa é a informação de quais pares de vértices formam uma aresta, e quais não.

Na figura 1.3 temos que $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e conjuntos de arestas $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (5, 7)\}$.

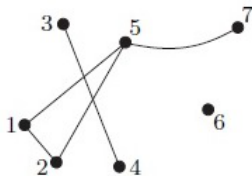


Figura 1.3: Exemplo de um Grafo

Fonte: [3]

Se $G = (V, E)$ é um grafo e u e v são dois de seus vértices, diremos que u e v são **adjacentes** (ou **vizinhos**) se $(u, v) \in E$; neste caso, dizemos ainda que a aresta (u, v) **incide** nos vértices u e v . Denotaremos simplesmente a aresta (u, v) por uv , sempre que não houver confusão de notação.

A teoria dos grafos é extremamente rica em aplicações. A tabela a seguir nos mostra algumas possíveis.

³A utilização da letra E para representar as arestas de G é oriunda da palavra inglesa para aresta, *edge*.

GRAFOS	VÉRTICES	ARESTAS
Comunicação	Centrais telefônicas e Satélites	Fibra ótica e enlaces de Microondas
Circuitos	Portas lógicas, registradores, processadores	Filamentos
Hidráulico	Reservatórios, estações de bombeamento	Tubulações
Financeiro	Ações, moeda	Transações
Transporte	Cidades, Aeroportos	Rodovias, Vias Aéreas
Internet	Páginas Web	Links
Jogos de Tabuleiro	Posições no tabuleiro	Movimentos permitidos
Relações Sociais	Pessoas, Atores	Amizades, Trabalho conjunto em filmes

Voltando à noção de adjacência, fixado um vértice u de G , denotamos o conjunto dos vértices adjacentes a u por:

$$N_G(u) = \{v \in V; uv \in E\}.$$
⁴

Definição 1.2.2. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Se $u \in V$, o **grau**⁵ de u , denotado por $d_G(u)$, é o número de vértices adjacentes a u :

$$d_G(u) = \#N_G(u).$$

Um vértice de grau 0 é dito **isolado**. O menor grau dentre os vértices de G é o grau mínimo de G , denotado por

$$\delta(G) := \min\{d_G(v) | v \in V\}.$$

Analogamente, o grau máximo é

$$\Delta(G) := \max\{d_G(v) | v \in V\}.$$

Fica evidente que

$$\delta(G) \leq d_G(u) \leq \Delta(G), \forall u \in G.$$

Acerca das definições anteriores é importante ressaltar que uma aresta pode ligar um vértice a ele mesmo, e neste caso temos um **laço**. Quando dois vértices estiverem

⁴O uso da letra N associada ao conjunto dos vizinhos do vértice u deriva da palavra inglesa para vizinho, *neighbor*.

⁵O uso de $d_G(u)$ para denotar o grau do vértice u deriva da palavra inglesa para grau, *degree*.

ligados por mais de uma aresta, temos então um **multigrafo**, ou seja, um grafo com arestas múltiplas. Grafos que não possuem laços ou não possuem arestas múltiplas são denominados de **grafos simples**.

1.2.1 Alguns tipos de grafos

Introduziremos a seguir alguns tipos de grafos, que serão úteis em nossa abordagem sobre grafos. Estes grafos são usados frequentemente como exemplos e aparecem com frequência em diversas aplicações.

Exemplo 1.2.1. Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que para todo par de vértices distintos $u, v \in V$ temos que $(u, v) \in E$. Dizemos então que G é um **grafo completo**⁶. Denotamos o grafo completo com n vértices por K_n . Em particular, note que K_n tem exatamente $\binom{n}{2}$ arestas.

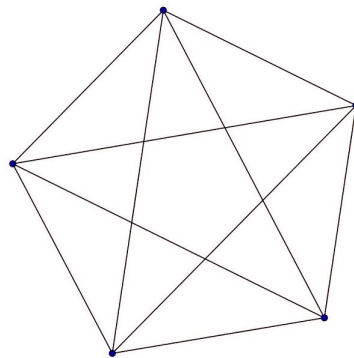


Figura 1.4: K_5

⁶A notação utilizada para grafos completos (K_n) é uma homenagem ao matemático polonês Kuratowski que obteve, em 1930, uma caracterização de planaridade por meio deste tipo de grafo.

Exemplo 1.2.2. Se $G = (V, E)$ é um grafo tal que $E(G) = \emptyset$, dizemos então que G é um **grafo vazio**.



Figura 1.5: Grafo vazio com 5 vértices

Exemplo 1.2.3. Seja $G = (V, E)$ um grafo e defina $\overline{E} = \{(u, v) \in [V]^2 | (u, v) \notin E\}$. O grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$ é dito o **grafo complementar** de G .

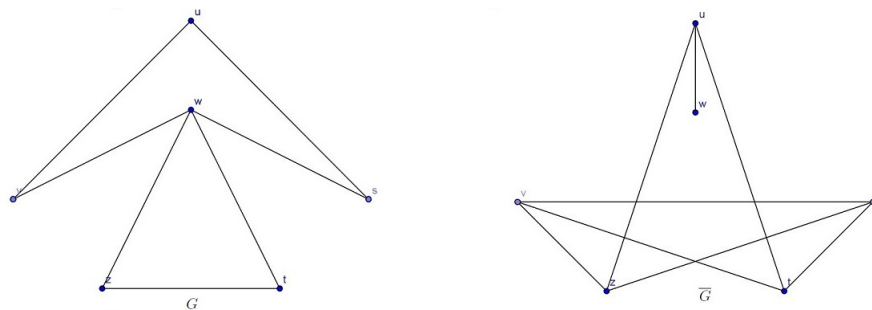


Figura 1.6: Grafo arbitrário G e seu complemento \overline{G}

Fonte: [2]

Exemplo 1.2.4. Se G é um grafo tal que $d_G(u) = r$ para todo $u \in V(G)$, dizemos que G é um grafo **regular**. Existem outras denominações como **regular de grau r** ou **r -regular**.

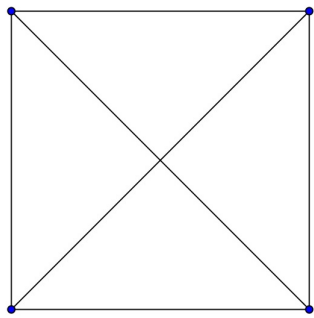


Figura 1.7: Grafo 3-regular

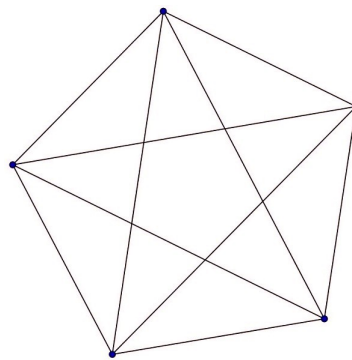


Figura 1.8: Grafo 4-regular

Todo grafo completo é também um grafo regular, porém a recíproca não é verdadeira. Apresentamos na figura a seguir um contra exemplo.

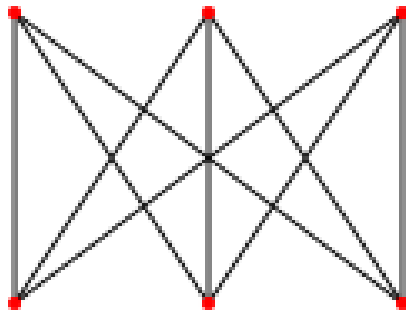


Figura 1.9: Grafo 3-regular e não completo

De posse destes conceitos introdutórios, apresentamos o teorema a seguir que é o resultado mais básico em teoria dos grafos.

Teorema 1.2.1. (*“Teorema do aperto de mãos” - Euler⁷*) Em um grafo $G = (V, E)$ a soma dos graus dos vértices é sempre igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$2|E| = \sum_{u \in V} d_G(u). \quad (1.1)$$

⁷Leonhard Euler (1707-1783) - matemático suíço. Contribuiu com importantes descobertas em campos variados da matemática como o cálculo, além de valiosas contribuições na terminologia e notação, em especial no campo da análise. Euler também demonstrou a fórmula $V - E + F = 2$ relacionando o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo e, portanto, de um grafo planar.

Prova. Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta possui duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes. \square

Corolário 1.2.1. (Euler). *Em um grafo qualquer, o número de vértices de grau ímpar é par.*

Prova. Para $k \geq 0$ inteiro, seja $v_k(G)$ o número de vértices de G com grau k . Como a soma no segundo membro de (1.1) tem exatamente $v_k(G)$ parcelas iguais a k , temos (novamente por contagem dupla) a igualdade

$$\sum_{u \in V} d_G(u) = \sum_{k \geq 0} kv_k(G). \quad (1.2)$$

Segue, pois, do teorema de Euler que

$$2|E| = \sum_{k \geq 0} kv_k(G) = \sum_{j \geq 0} v_{2j+1}(G) + \sum_{j \geq 1} 2j(v_{2j}(G) + v_{2j+1}(G)).$$

Logo,

$$\sum_{j \geq 0} v_{2j+1}(G) = 2|E| - \sum_{j \geq 1} 2j(v_{2j}(G) + v_{2j+1}(G)),$$

um número par. \square

Exemplo 1.2.5. *Antes de uma reunião sindical, dez pessoas sindicalizadas trocaram apertos de mão. É possível que os apertos de mão tenham acontecido em alguma ordem, iguais a 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 8 ?*

Prova. Considere os sindicalistas como os vértices de um grafo, onde dois vértices são adjacentes se as pessoas correspondentes tiverem trocado um aperto de mão. Então dizer que os graus dos vértices são, em alguma ordem, iguais a 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 8, contradiz o corolário acima (existem sete vértices com grau ímpar). Logo, a situação descrita não pode ser satisfeita.

1.2.2 Subgrafos

Definição 1.2.3. Um grafo H é um **subgrafo** de um grafo G se $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$. O grafo H é um **subgrafo gerador** de G se H for um subgrafo de G tal que $V(H) = V(G)$.

A seguir mostraremos dois exemplos de como obter subgrafos de um grafo.

Exemplo 1.2.6. Dado um grafo $G = (V, E)$, o subgrafo de G obtido por **excisão da aresta** e de G é o grafo $H = (V, E \setminus e)$, denotado apenas por $G - e$. Ou seja, o subgrafo $G - e$ é obtido de G removendo a aresta e . Podemos afirmar também que $G - e$ é um subgrafo gerador de G .

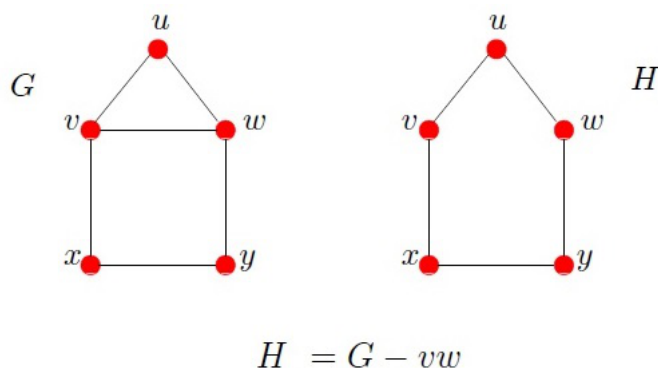


Figura 1.10: Excisão da Aresta vw

Exemplo 1.2.7. Dado um grafo $G = (V, E)$, o subgrafo de G obtido por **excisão do vértice** u de G é o grafo $H = (V \setminus \{u\}, E')$, onde

$$E' = E \setminus \{e \in E; e \text{ incide em } u\}.$$

Tal subgrafo de G é denotado por $G - u$. Ou seja, o subgrafo $G - u$ é obtido de G removendo o vértice u e todas as arestas nele incidentes. Verifica-se ainda que $G - u$ tem um vértice a menos e $d_G(u)$ arestas a menos que G .

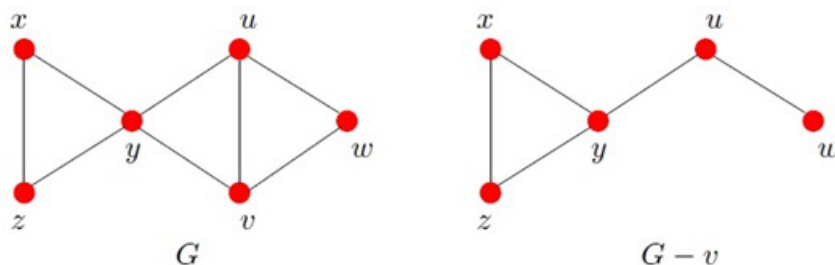


Figura 1.11: Excisão do Vértice v

Subgrafo induzido por um conjunto de vértices

Dados um grafo G e seu subconjunto A de $V(G)$, o subgrafo de G **induzido** por A é o grafo $G|_A = (A, E')$, onde

$$E' = \{(u, v) \in E; u, v \in A\}.$$

Neste caso diz-se também que o grafo G é restrito ao conjunto de vértices de A .

1.2.3 Passeios, Caminhos e Ciclos

Muitos problemas podem ser modelados por caminhos formados percorrendo as arestas de um grafo. Problemas de planejamento de rotas eficientes de entrega, coleta de lixo, links em uma rede de telecomunicações podem ser resolvidos utilizando modelagens que envolvem caminhos em um grafo.

Definição 1.2.4. Um **passeio** é uma sequência de arestas do tipo $v_0v_1, v_1v_2, v_2v_3, \dots$ e $v_{n-1}v_n$, onde n é o comprimento do passeio. Se todas as arestas do passeio são distintas, o passeio é chamado **trilha**; se $v_0 = v_n$ o passeio é uma **trilha fechada**, caso ocorra $v_0 \neq v_n$ teremos uma **trilha aberta**.

Se além das arestas, todos os vértices são distintos então temos um **caminho**.

Definição 1.2.5. Um **caminho** P em um grafo G é uma sequência $v_1; v_2; v_3; \dots; v_n$ de vértices distintos de G sendo que v_i e v_{i+1} com $1 \leq i \leq n - 1$ são incidentes na mesma aresta.

Definição 1.2.6. Um **Ciclo** é um passeio de comprimento mínimo três, em que o primeiro e o último vértice coincidem, mas nenhum outro vértice é repetido. Denota-se por C_n .

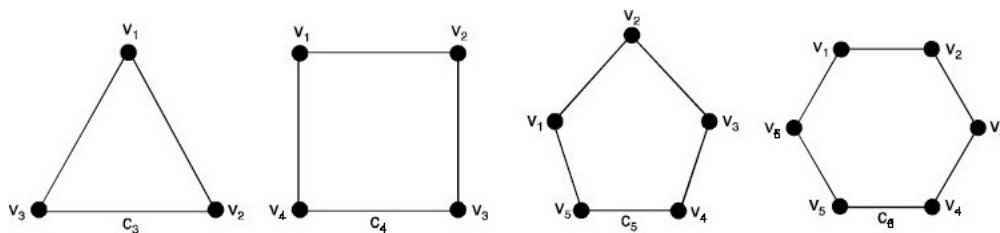


Figura 1.12: Ciclos C_3, C_4, C_5 e C_6

O **comprimento** do caminho é o total do número de arestas. Assim, o caminho P_n é obtido retirando uma aresta do ciclo C_{n+1} .

1.2.4 Caminho Euleriano e Caminho Hamiltoniano

Ao percorrer as arestas de um grafo, será possível começar em um vértice e retornando a ele percorrendo cada aresta uma única vez? Do mesmo modo, podemos percorrer as arestas de um grafo começando em um vértice e retornando a ele visitando cada vértice do grafo exatamente uma vez? Nesta seção, estudaremos esses conceitos.

Definição 1.2.7. Um **caminho Euleriano** é um caminho em que se percorre cada aresta do grafo uma, e só uma vez, partindo de um vértice e a ele retornando. Se o grafo não é euleriano mas tem uma trilha aberta de comprimento m , ele é dito **semieuleriano**.

Um grafo é Euleriano se há um caminho em G que contenha todas as suas arestas.

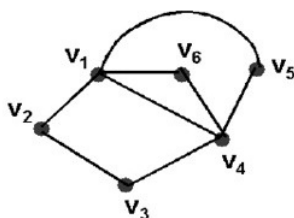


Figura 1.13: Grafo Euleriano

O caminho $V_1, V_6, V_4, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_1$ é Euleriano

Definição 1.2.8. Um **caminho Hamiltoniano** é um caminho que passa por cada vértice do grafo exatamente uma vez.

Um ciclo $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ é hamiltoniano quando o caminho v_1, v_2, \dots, v_k for um caminho hamiltoniano.

Um grafo é Hamiltoniano⁸ se contém um passeio fechado que passa por cada um de seus vértices exatamente uma vez.

⁸Essa notação é uma homenagem ao matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865). Colaborou com trabalhos fundamentais ao desenvolvimento da ótica, dinâmica e álgebra. A sua descoberta mais importante em matemática está relacionada ao surgimento dos quatérnios, contribuindo decisivamente para a “libertação da álgebra”.

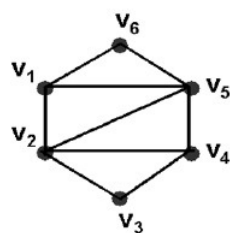


Figura 1.14: Grafo Hamiltoniano

O ciclo $V_6, V_5, V_4, V_3, V_2, V_1, V_6$ é um caminho Hamiltoniano

Um jogo proposto por Hamilton, denominado “Volta ao Mundo”, utiliza-se deste conceito.



Figura 1.15: Jogo Volta ao Mundo

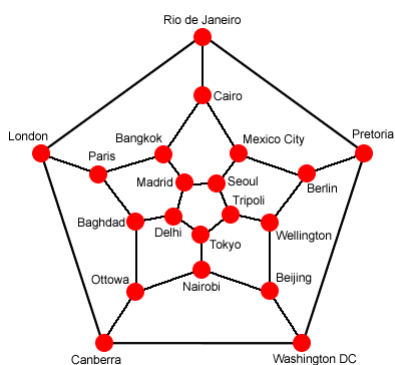


Figura 1.16: Jogo Volta ao Mundo

Diz-se que ele inventou um jogo que envolve um dodecaedro (sólido regular com 20 vértices, 30 arestas e 12 faces). Hamilton rotulou cada vértice do dodecaedro com

o nome de uma cidade conhecida. O objetivo do jogo era que o jogador viajasse “ao redor do mundo” ao determinar uma viagem circular que incluísse todas as cidades exatamente uma vez, com a restrição de que só fosse possível viajar de uma cidade a outra se existisse uma aresta entre os vértices correspondentes. Resumidamente o problema era: É possível começar em uma cidade e visitar todas as outras cidades exatamente uma única vez e retornar à cidade de partida?

Uma solução para o jogo é a que segue abaixo (Observe o Ciclo em Azul).

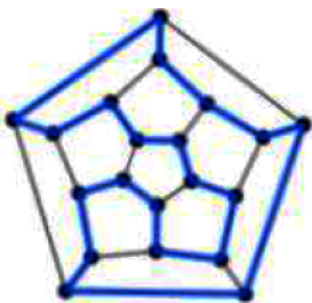


Figura 1.17: Uma Solução do Jogo Volta ao Mundo - Planificado

Originalmente o jogo foi comercializado em duas versões, sob o nome “*A Voyage Round the World*”. Uma versão foi construída sobre uma placa plana e a outra, consistia do dodecaedro regular de madeira que era muito volumoso e difícil de manejar. Podemos usar o correspondente grafo planificado (ver figura 1.16), substituindo a lâ por um lápis de cor. O jogo foi um fracasso completo de vendas, principalmente porque era considerado muito fácil, mesmo para as crianças.

É importante ressaltar que decidir se um dado grafo é hamiltoniano é um problema considerado difícil⁹ e ainda não se conhece uma condição necessária e suficiente para um grafo ser hamiltoniano (que seja fácil de ser testada).

Os dois exemplos de tipos de grafos citados anteriormente, possuem uma característica muito importante em teoria dos grafos: são ditos **conexos**.

⁹Paulo Cezar Pinto Carvalho (IMPA) afirma: “Apesar de terem sido estudados por vários séculos, não há uma boa caracterização dos grafos hamiltonianos. Há diversas famílias de grafos para os quais existe um ciclo hamiltoniano (um exemplo trivial é um grafo completo, em que cada vértice é ligado a todos os outros); também é possível estabelecer certas condições que implicam na não-existência de um circuito. Mas uma caracterização geral não foi encontrada e, à luz de certos avanços em teoria da computação das últimas décadas, parece improvável que ela seja encontrada algum dia”.

Definição 1.2.9. Um grafo é conexo se existir um passeio entre dois quaisquer de seus vértices. Um grafo que não é conexo é dito **desconexo**.

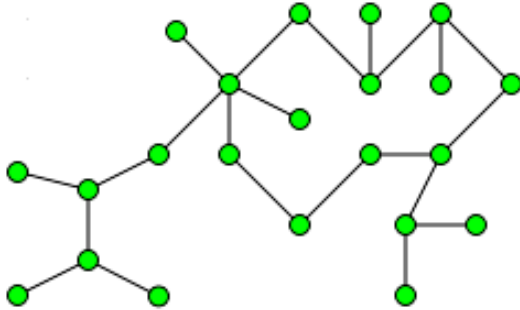


Figura 1.18: Grafo Conexos

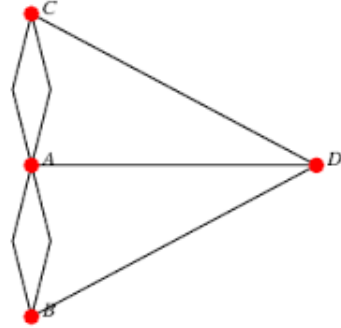


Figura 1.19: Grafo Conexos
Pontes de Königsberg

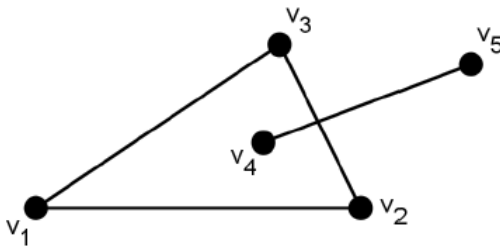


Figura 1.20: Grafo Desconexo

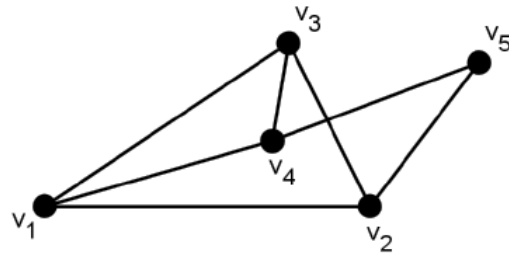


Figura 1.21: Grafo Conexos

1.2.5 Grafos Isomorfos

A seguir, definiremos uma importante noção de equivalência para grafos.

Definição 1.2.10. Dois grafos $G = (V_1; E_1)$ e $H = (V_2; E_2)$ são **isomorfos** se existir uma bijeção $f : V_1 \rightarrow V_2$ que preserva incidência, i.e., para vértices distintos quaisquer u e v de G , tenhamos

$$(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2.$$

Nesse caso, denotamos $G_1 \simeq G_2$.

A proposição a seguir dá condições necessárias para dois grafos serem isomorfos.

Proposição 1.2.1. Dois grafos isomorfos têm quantidades iguais de vértices de um mesmo grau. Em particular, tem quantidades iguais de vértices e quantidades iguais de arestas.

Prova. Sejam $G = (V_1, E_1)$ e $H = (V_2, E_2)$ grafos isomorfos e $f : V_1 \rightarrow V_2$ uma bijeção que preserva incidência. Se u é um vértice de G com grau $k \geq 0$, é imediato que $f(u)$ é um vértice de H com grau k , e reciprocamente. Portanto, G e H têm quantidades iguais de vértices de grau k , digamos a_k de maneira que

$$|V_1| = \sum_{k \geq 0} a_k = |V_2|.$$

Por outro lado, aplicamos o teorema de Euler duas vezes, juntamente com a primeira parte acima, obtemos

$$2|E_1| = \sum_{u \in V_1} d_G(u) = \sum_{u \in V_1} d_H(f(u)) = \sum_{f(u) \in V_2} d_H(f(u)) = 2|E_2| \therefore |E_1| = |E_2| \quad \square$$

A figura a seguir é um exemplo de Isomorfismo entre grafos.

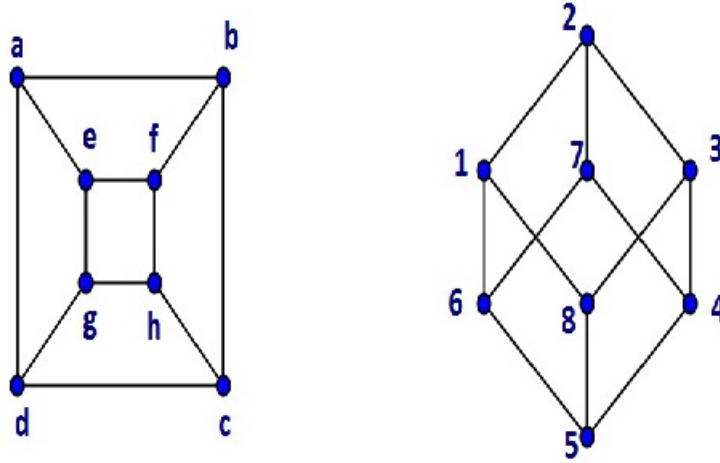


Figura 1.22: Exemplo 1 - Isomorfismo

Para verificar o isomorfismo do grafo da figura 1.22, podemos utilizar a seguinte função dada por:

$$f(a) = 6, f(b) = 7, f(c) = 4, f(d) = 5, f(e) = 1, f(f) = 2, f(g) = 8, f(h) = 3.$$

O isomorfismo dos grafos (a) e (b) (figura 1.23), pode ser verificado utilizando a função definida por:

$$f(a) = s, f(b) = t, f(c) = u, f(d) = v, f(e) = r, f(f) = m, f(g) = n, f(h) = o, f(i) = p, f(j) = q.$$

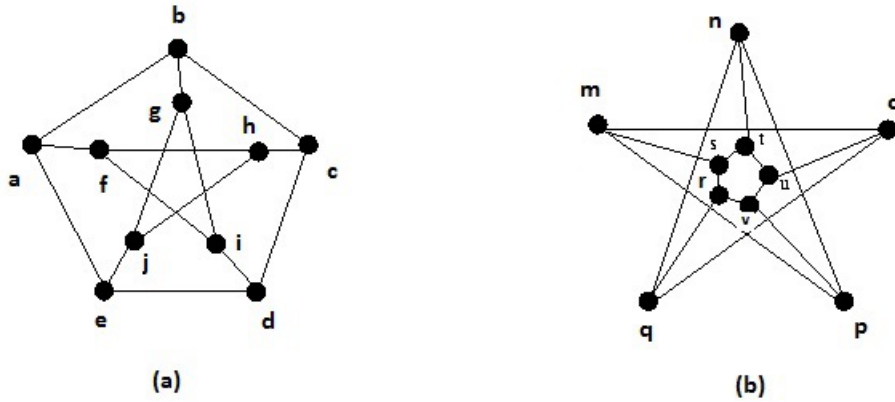


Figura 1.23: Exemplo 2 - Isomorfismo

É importante ressaltar que não é sempre fácil determinar se dois grafos são isomorfos. Não existe atualmente um algoritmo eficiente para resolver esse tipo de problema.

Exemplo 1.2.8. Se $G = (V, E)$ for um grafo de n vértices, podemos, sempre que necessário, supor que $V = I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, de fato, como $|V| = n$, existe uma bijeção $f : V \rightarrow I_n$ e podemos definir $H = (I_n, F)$ pondo, para $i \neq j$ em I_n ,

$$(i, j) \in F \Leftrightarrow (f^{-1}(i), f^{-1}(j)) \in E.$$

O exemplo acima nos permite introduzir outra representação bastante útil de um grafo, a **matriz de adjacência**.

1.2.6 Matriz de Adjacência

Existem muitas maneiras de se representar um grafo. Em algumas situações é útil escolher uma apresentação mais conveniente. Essa representação é uma forma bastante interessante de aplicação da utilização das matrizes.

Definição 1.2.11. Dado um grafo $G = (V, E)$, com $|V| = n$, suponha, de modo como o exemplo acima, que $V = I_n$. A matriz de adjacência de G é a matriz

$$Adj(G) = (a_{ij})_{n \times n},$$

tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \neq j \text{ e } (i, j) \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1.2.9. No grafo a seguir, os vértices 2, 3 e 5 são vértices adjacentes do vértice 4. Então, na matriz de adjacência a quarta linha que corresponde ao vértice 4 possui valores 1 para os vértices 2, 3 e 5, e 0 para os vértices 1 e 4.

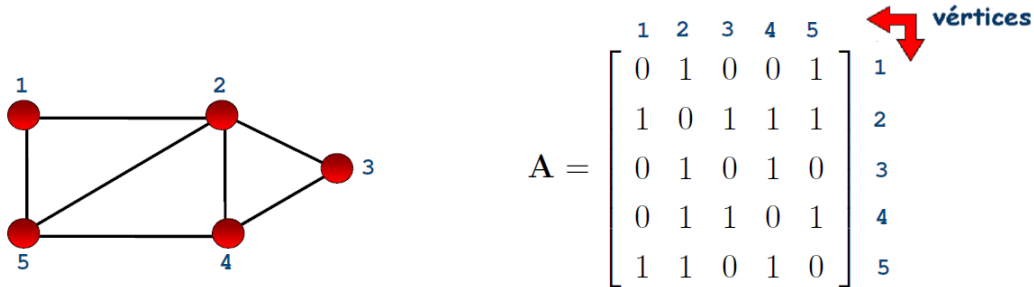


Figura 1.24: Grafo G e sua Matriz de Adjacência

Lema 1.2.1. *A matriz de adjacência de um grafo é simétrica, com zeros na diagonal principal.*

Prova. Nas notações da definição acima, temos para $i \neq j$ em I_n que

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in E \Leftrightarrow (j, i) \in E \Leftrightarrow a_{ji} = 1;$$

portanto, $Adj(G)$ é simétrica. O resto é imediato a partir da definição acima. \square

Relação de Equivalência

Fixado um grafo G , é imediato verificar que a relação \sim em $V(G)$, definida por

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \text{ ou existe em } G \text{ um passeio ligando } u \text{ a } v, \quad (1.3)$$

é de equivalência. Note ainda que uma classe de equivalência de $V(G)$ com respeito a tal relação é, em particular, um conjunto de vértices de G .

1.2.7 Grafos e Componentes Conexas

Definição 1.2.12. As **componentes conexas** de um grafo G são os subgrafos $G|_A$ de G , induzidos pelas classes de equivalência A de $V(G)$ com respeito à relação (1.3).

Se A é uma classe de equivalência de vértices de G com respeito à relação (1.3), então, há um passeio entre dois vértices distintos quaisquer de A , de maneira que $G|_A$ é um grafo conexo. Por outro lado, se H é um subgrafo conexo de G contendo $G|_A$, então $H = G|_A$; de fato, se $u \in V(H)$ e $v \in A \subset V(H)$, então a conexidade de H garante a existência de um passeio em H (e, portanto, em G) ligando u a v ; logo, $u \in A$, pelo fato de A ser uma classe de equivalência de vértices em relação à existência de passeios. Temos, então, que $A \subset V(H) \subset A$ e, daí, $H = G|_A$. Assim, podemos afirmar que as componentes conexas de um grafo são exatamente seus subgrafos conexos maximais.

O grafo G na figura 1.25 tem duas componentes conexas, a saber: $G_1 = (V_1, E_1)$, com $V_1 = (v_1, v_2, v_3)$ e $E_1 = (v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3)$, e $G_2 = (V_2, E_2)$, com $V_2 = (v_4, v_5)$ e $E_2 = (v_4v_5)$, onde $G = G_1 \cup G_2$.

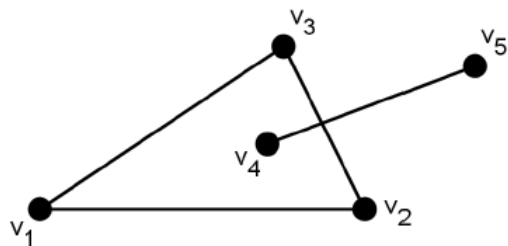


Figura 1.25: Componentes Conexas

1.3 Conexidade e Conectividade

A **conexidade** é um dos temas centrais em teoria dos grafos, não apenas do ponto de vista teórico mas principalmente do prático, visto que existem grafos “mais conexos” que outros.

A noção de conexidade está relacionada com a possibilidade da passagem de um vértice a outro em um grafo através das arestas existentes. Um grafo conexo pode tornar-se desconexo removendo apenas um vértice ou uma aresta.

Ao discutirmos a conexidade de grafos (no nosso caso não orientados) ficamos diante apenas de duas possibilidades que se excluem mutuamente - ou um grafo será conexo, ou será desconexo. Considerando que se um grafo é conexo, verificaremos uma maneira de quantificar essa informação, visto que existem grafos mais conexos

que outros, i.e, podemos avaliar até que ponto um grafo será “mais conexo”¹⁰ que outro grafo. Essa quantificação é denominada de **conectividade** e é um dos conceitos básicos da teoria dos grafos, possuindo extrema importância não só teórica mas prática.

A conectividade de um grafo pode ser utilizada como uma importante medida da robustez de uma rede, e portanto a conectividade de arestas e de vértices representam dois parâmetros numéricos muito úteis para estudar a conexidade de um grafo.

Um exemplo prático é determinar e analisar a confiabilidade de redes de telecomunicações, nas quais existem usualmente diferentes caminhos entre um par de antenas (estações locais - representando os vértices do grafo). Neste tipo de situação é importante saber quantas ligações (arestas) podem ser bloqueadas ou partidas sem que uma chamada telefônica entre duas antenas seja danificada.

O número mínimo de arestas ou vértices que, removidos, desconectam um grafo representam uma aplicação direta da confiabilidade de uma rede.

¹⁰(Boaventura Netto e Paulo Oswaldo - Grafos: teoria, modelos e algoritmos. 2011, p. 42)

1.3.1 Um exemplo de aplicação

Consideremos os seguintes grafos abaixo, que representam possíveis ligações de centrais telefônicas entre algumas cidades americanas:

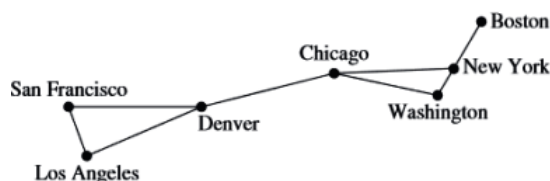


Figura 1.26: Link 1
Fonte: [10]

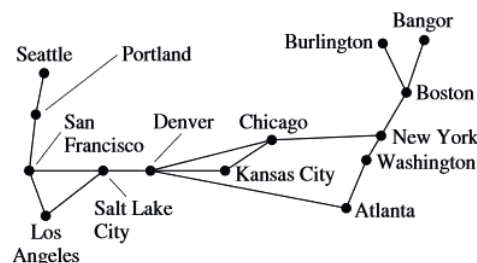


Figura 1.27: Link 2
Fonte: [10]

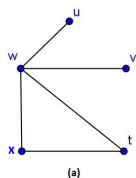
Na figura 1.26 se o link Denver-Los Angeles (aresta) for danificado a comunicação entre as demais centrais telefônicas continuam a ser possíveis, mas se por exemplo, o link Boston-New York (aresta) for danificado a central de Boston ficará incomunicável.

No caso da figura 1.27 se o link (aresta) San Francisco-Los Angeles falhar a ligação entre estas duas cidades não será prejudicada, pois poderá ser feita pelo conjunto de links (arestas) San Francisco-Salt Lake City-Los Angeles. Se a central de Boston (vértice) for danificada juntamente com a central de Portland (vértice) teremos a incomunicabilidade das cidades de Berlington, Bangor e Seattle com as demais cidades representadas.

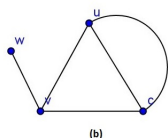
A conectividade de arestas do grafo que representa a rede de telecomunicações é o número mínimo de links (arestas) que danificados, impedem as centrais de se comunicarem. A conectividade de vértices representa o número de centrais que podem ser danificadas sem que haja perda da comunicação entre elas. Verifica-se portanto que, há dois importantes motivos para prover rotas alternativas entre duas centrais telefônicas; a primeira é que a comunicação continue a ser possível, mesmo que algum link seja danificado, e outra é que uma particular ligação ou central num caminho entre duas centrais pode também fazer parte de um caminho entre outro par de centrais. O link ou central pode ser usado quando houver a necessidade de uma nova chamada ser solicitada, prevenindo assim a desconexão e permitindo que a nova chamada seja completamente realizada.

1.3.2 Conexidade de Arestas

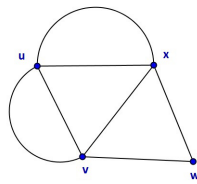
Considere os seguintes grafos:



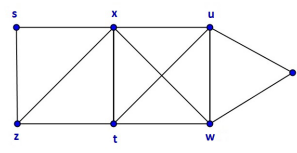
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.28: Grafos Conexos (a) e (b)

Fonte: [13]

Figura 1.29: Grafos conexos (c) e (d)

Fonte: [13]

O grafo (a) pode ser separado em duas componentes removendo a aresta vw ou wu , ou seja, a remoção de qualquer uma destas arestas desconecta o grafo. No grafo (b), por exemplo, a remoção das arestas vu e vc desconectam o grafo.

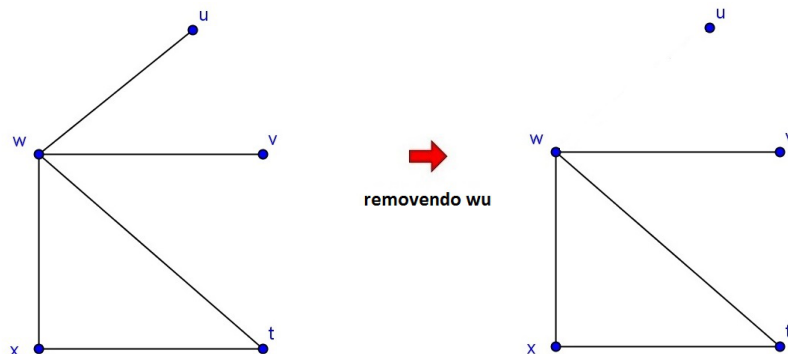


Figura 1.30: O Grafo conexo à esquerda torna-se desconexo depois da remoção da aresta wu

Fonte:[13]

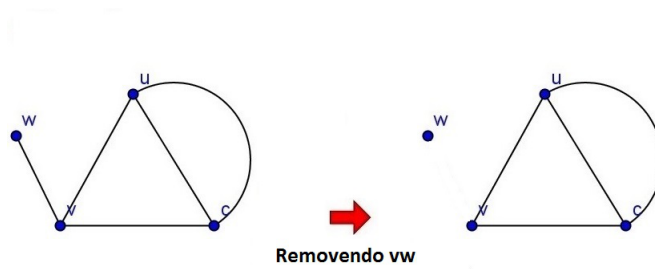


Figura 1.31: O Grafo conexo à esquerda torna-se desconexo depois da remoção da aresta vw
 Fonte:[13]

Quando uma única aresta removida, desconecta o grafo, denominamos de **ponte**. Os grafos (c) e (d) não podem ser desconectados com a remoção de uma única aresta, mas sim removendo duas arestas.

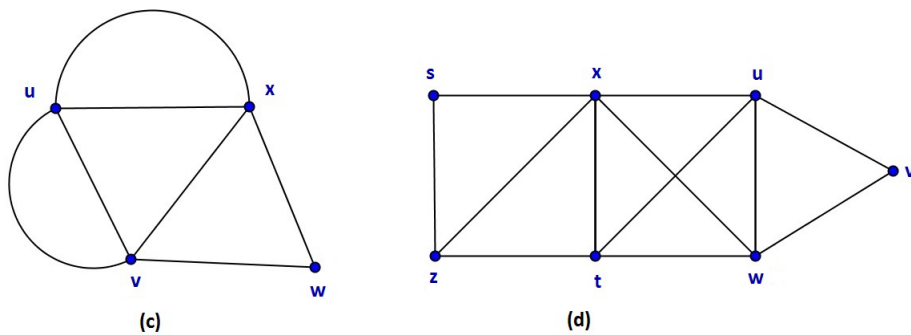


Figura 1.32: Grafos conexos (c) e (d)
 Fonte: [13]

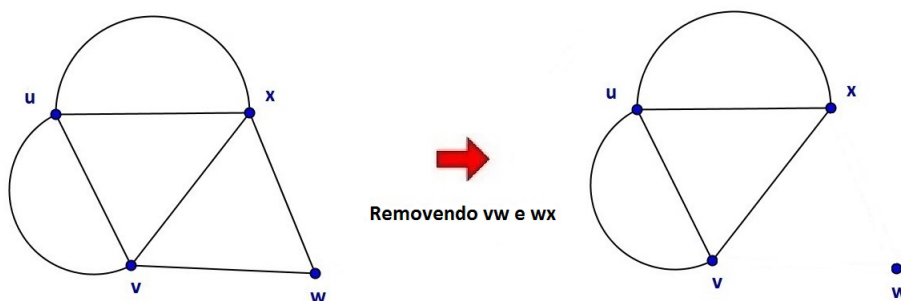


Figura 1.33: O Grafo conexo (c) torna-se desconexo depois da remoção das arestas wv e wx .
 Fonte: [13]

O grafo conexo (c) torna-se desconexo depois da remoção das arestas wv e wx .

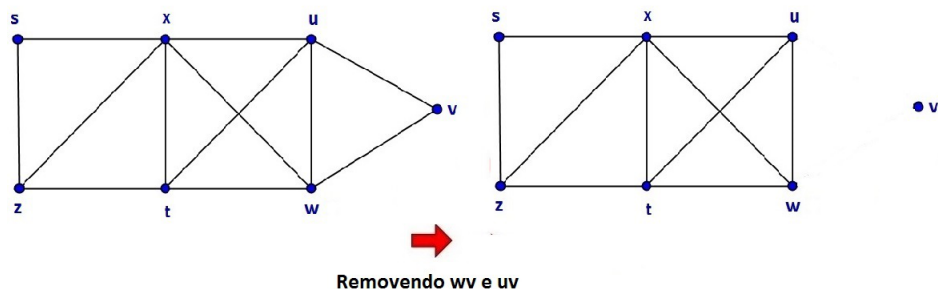


Figura 1.34: O Grafo conexo (d) torna-se desconexo

Fonte: [13]

1.3.3 Conexidade de vértices

Podemos definir também a conexidade, verificando o número mínimo de vértices que sendo removidos desconectam o grafo. Quando se remove um vértice retiram-se também as arestas que nele incidem.

Considerando a figura 1.28 temos que os grafos (a) e (b) podem ser desconectados removendo um único vértice. Vejamos as figuras a seguir:

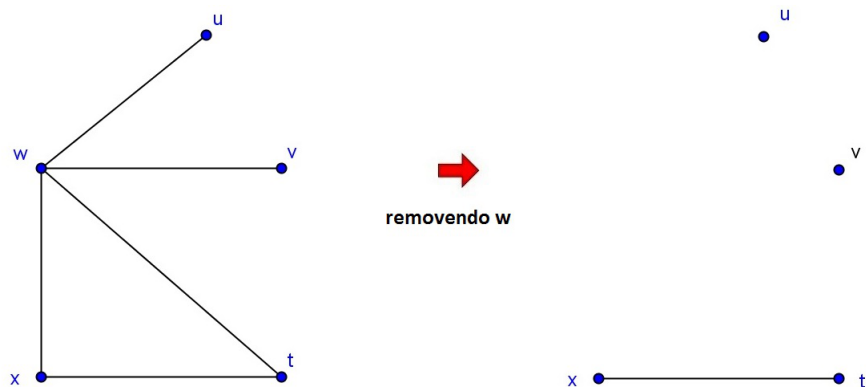


Figura 1.35: Obtenção de grafo desconexo removendo o vértice w .

Fonte: [13]

O grafo conexo à esquerda torna-se desconexo depois da remoção do vértice w . Podemos observar que ao remover-mos um vértice, removemos também as arestas que incidiam no vértice removido.

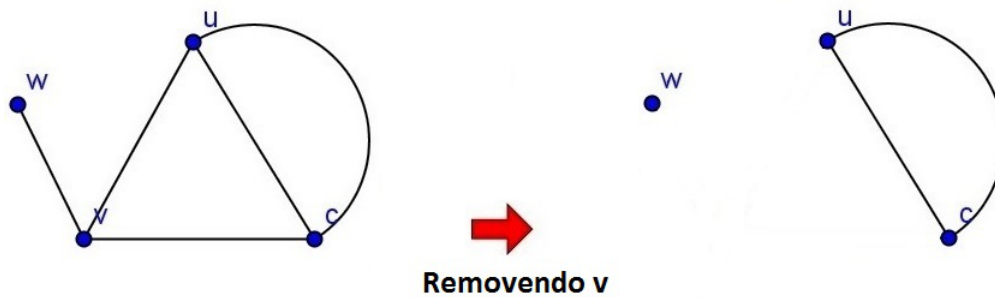


Figura 1.36: Obtenção de grafo desconexo removendo o vértice v .
 Fonte: [13]

Os grafos (c) e (d) (ver figura 1.29) não podem ser desconectados com a remoção de um único vértice, mas sim removendo dois vértices.

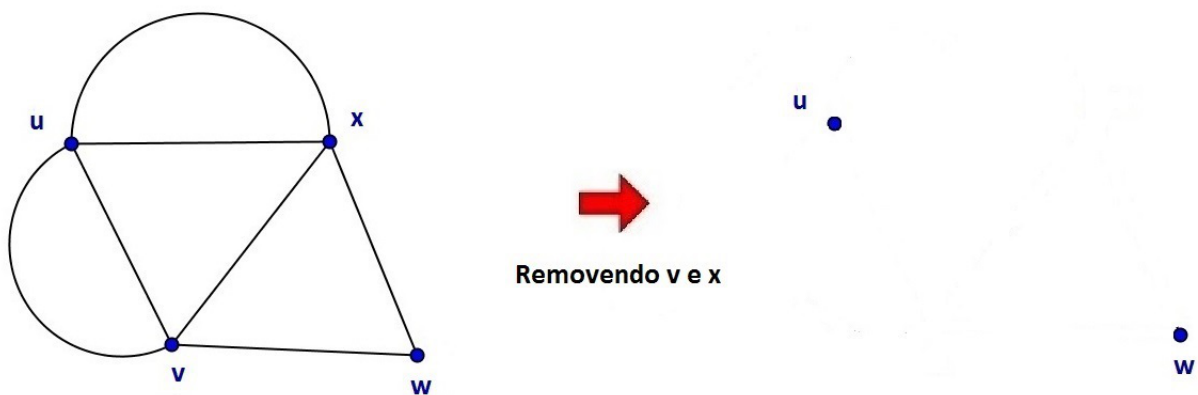


Figura 1.37: Obtenção de grafo desconexo removendo os vértices v e x
 Fonte: [13]

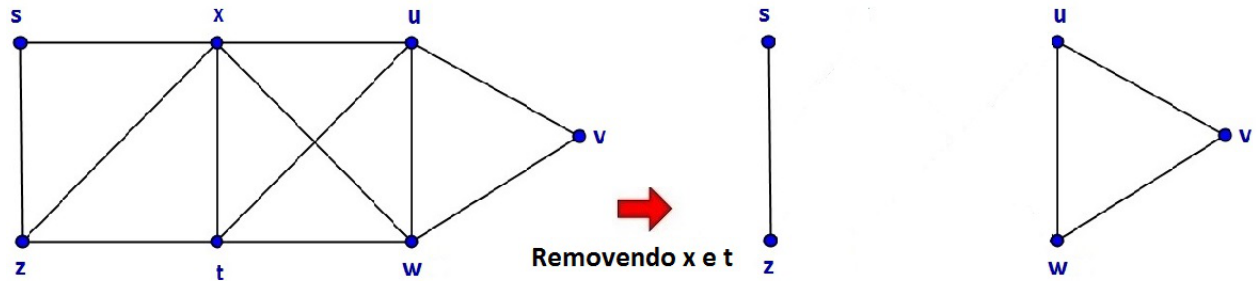


Figura 1.38: Obtenção de grafo desconexo removendo os vértices x e t .

Fonte: [13]

1.3.4 Conectividade

Definição 1.3.1. Seja G um grafo. Dizemos que G é κ -conexo se, para todo $S \subseteq V(G)$ e $|S| < \kappa$, temos que o grafo $G - S$ é conexo e G possui ao menos $\kappa + 1$ vértices.

Analogamente, dizemos que G é κ -aresta-conexo se, para todo $F \subseteq E(G)$, com $|F| < \kappa$, temos que $G - F$ é conexo e possui ao menos dois vértices.

Dizemos então que um grafo conexo é κ -conexo se, ao retirar-mos $\kappa - 1$ vértices do grafo, ele continua conexo. Além disso, convencionamos que todo grafo é 0-conexo e 0-aresta-conexo.

Finalmente, definimos a conectividade de G , denotada por $\kappa(G)$, como o maior natural κ tal que G é κ -conexo e definimos a aresta-conectividade de G , denotada por $\kappa'(G)$, como o maior natural κ tal que G é κ -aresta-conexo.

Voltando ao problema das sete pontes de Königsberg (ver figura 1.43), temos que o grafo resultante da modelagem é 2-conexo.

Na figura abaixo (1.40) temos mais alguns exemplos da κ -conexidade.

Proposição 1.3.1. Seja um grafo completo, K_n , temos que

$$\kappa(K_n) = n - 1.$$

Nota-se que neste caso o grafo desconexo obtido é um único vértice, cuja verificação é simples.

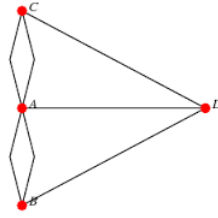


Figura 1.39: Grafo 2–Conexo

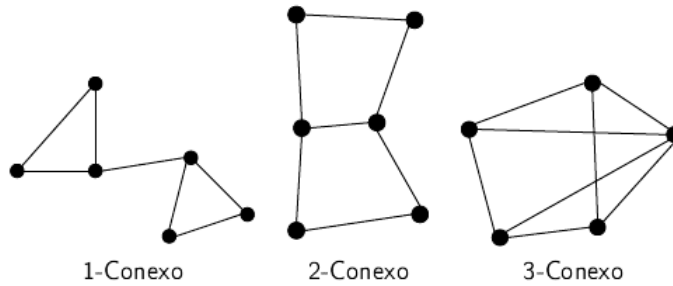


Figura 1.40: Grafos κ –Conexos

Se ao contrário, G não for completo, haverá dois vértices $v, w \in V$ não adjacentes e se poderá obter um grafo não conexo pela remoção, no máximo, dos demais $n - 2$ vértices. Logo,

$$\kappa(G) \leq n - 2, \forall G \neq K_n, \text{ onde } n \text{ é o número de vértices de } G.$$

Portanto, para cada grafo G de ordem n , temos segundo os matemáticos Chartrand e Zhang¹¹ que:

$$0 \leq \kappa \leq n - 1.$$

Assim, um grafo não trivial G tem conectividade 0 se, e somente se, G é um grafo desconexo.

Para os grafos da figura 1.41 temos $\kappa(G_1) = \kappa(G_2) = \kappa(G_3) = 1$, $\kappa(G_4) = \kappa(G_5) = 2$, $\kappa(G_6) = 4$ e $\kappa(G_7) = 6$.

É importante frisarmos que a conectividade não é um parâmetro de fácil determinação. Mesmo uma estimativa pode ser difícil se o grau mínimo for elevado.

¹¹Chartrand and Zhang, Ping. A first course in graphy theory. McGraw-Hill Higher Education, Boston, 2005.

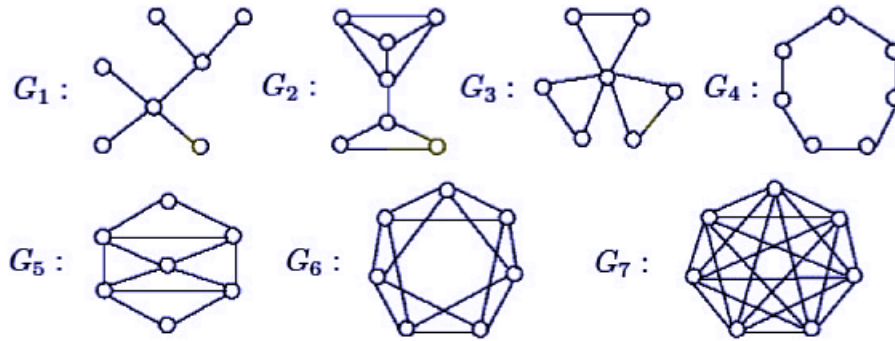


Figura 1.41: Grafos Conexos
Fonte: [2]

1.4 Alguns resultados sobre conectividade de grafos

Proposição 1.4.1. Se G é desconexo então \overline{G} é conexo.

Prova. Suponha que G é desconexo. Queremos mostrar que \overline{G} é conexo. Sejam v e w vértices tais que vw não é uma aresta em G , então é uma aresta em \overline{G} , e por isso temos um caminho de v para w em \overline{G} . Por outro lado, se vw é uma aresta em G , então isto significa que v e w estão na mesma componente de G . Como G é desconexo, podemos encontrar um vértice u em uma componente diferente, de modo que nem uv nem uw são arestas de G . Então vuw é um caminho de v para w em \overline{G} . Isto mostra que quaisquer dois vértices em \overline{G} tem um caminho (de fato, um caminho de comprimento um ou dois) entre eles em \overline{G} , então \overline{G} é conexo. \square

A recíproca não é verdadeira e é fácil encontrar exemplos. Por exemplo, o grafo G com matriz de adjacência

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é conexo e \overline{G} também.

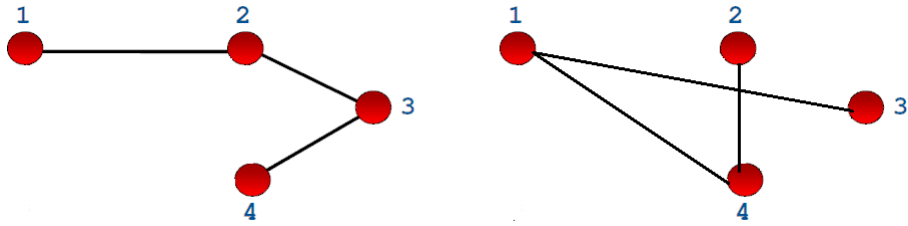


Figura 1.42: Grafos G e \overline{G} , ambos conexos

Conforme foi citado na introdução vimos que o problema das pontes de Königsberg não possui solução.

Euler mostrou que a resposta era negativa, estabelecendo assim uma condição necessária, a qual será demonstrada a seguir.

Lema 1.4.1. *Se todo vértice de um grafo (não necessariamente simples) G tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo.*

Prova. Se G contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois, automaticamente, G contém um ciclo. Consideramos, portanto, apenas os grafos simples. À partir de um vértice v_0 , qualquer, iniciamos nossa trilha. Quando chegamos a um vértice qualquer, ou o estamos visitando pela primeira vez e podemos continuar, ou chegamos a um vértice já visitado, produzindo um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado. \square

E agora o teorema.

Teorema 1.4.2. *Teorema de Euler (1736). Um grafo conexo (não necessariamente simples) G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.*

Prova.

(\Rightarrow) Suponhamos que G tenha uma trilha fechada de comprimento m . Cada vez que a trilha passa por um vértice utiliza duas novas arestas, um para entrar e outra para sair. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.

(\Leftarrow) Usaremos indução sobre o número de arestas m do grafo. Por vacuidade, o teorema é válido quando $m = 0$. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior que 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todas as trilhas fechadas em G escolhemos uma trilha T com comprimento máximo. Se T tem comprimento m , o teorema está provado. Caso

contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T . Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T , e todos os vértices do grafo tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, H tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H , e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando T com a trilha em H . Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T . \square

Corolário 1.4.1. *Hierholzer (1873) Um grafo conexo G é semieuleriano se, e somente se, no máximo, dois vértices têm grau ímpar.*

Prova. Para o caso em que há exatamente dois vértices de grau ímpar, basta conectar esses vértices por uma aresta, tornando todos os graus pares, e portanto o grafo será euleriano. Se excluirmos essa aresta, teremos uma trilha (todas as arestas serão distintas) e o grafo será semieuleriano. \square

Voltando mais uma vez ao famoso problema das sete pontes de Königsberg, o corolário anterior nos fornece a condição suficiente. Temos que o grafo resultante (figura abaixo) da modelagem embora seja conexo, não é euleriano, pois possui vértices de grau ímpar, e nem é semieuleriano pois possui 4 vértices de grau ímpar, tornando assim impossível percorrer todas as pontes (arestas) uma única vez.

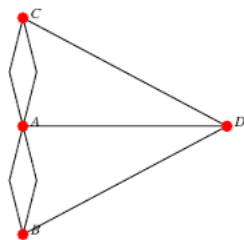


Figura 1.43: Grafo - Pontes de Königsberg

1.4.1 Rede de Subestações Elétricas no Estado de Sergipe - Uma visão do sistema sob a perspectiva da teoria dos grafos

A noção de conectividade, além do interesse teórico, é aplicada a determinação da confiabilidade de sistemas complexos (a probabilidade de ausência de falha num

período dado), a partir das confiabilidades dos seus componentes, em particular ao se lidar com sistemas elétricos¹² e eletrônicos.

A idéia de **vulnerabilidade** é oposta à de conectividade, sendo bastante útil para sabotagem de um sistema. Ao identificar-mos um (ou mais) ponto(s) vulnerável(veis) em redes de telecomunicações ou em redes elétricas, ao desativar-se este ponto(s) essa será a forma mais econômica de desativar esta rede. Em teoria dos grafos a identificação deste ponto vulnerável em uma rede de maior complexidade recorre ao teorema Ford-Fulkerson (“*Max-Flow Min-Cut Theorem*”).

A **robustez** é a capacidade de uma rede em poder continuar a desempenhar bem sua função quando se está sujeito a falhas ou ataques. A pesquisa da robustez de uma rede visa encontrar uma medida para quantificar a eficiência (robustez) da rede. Uma vez que tal medida foi estabelecida, nós seremos capazes de comparar as redes, melhorando assim as redes existentes e desta forma conceber novas redes mais robustas. O aumento da conectividade ajuda a melhorar a robustez de uma rede.

Com a atual crise hídrica brasileira fazendo parte da mídia diariamente e o risco constante de apagões, com o objetivo de conhecer o sistema de distribuição e subdistribuição de energia elétrica no estado de Sergipe, levantamos dados junto à principal empresa concessionária de energia em Sergipe - ENERGISA que atende 65 de um total de 75 municípios sergipanos. Foram disponibilizados mapas da rede além de informações técnicas acerca do funcionamento do sistema. Foram feitos diversos contatos e uma reunião técnica para aprofundar-mos o tema conexidade e o seu papel no sistema de subdistribuição de energia. Após o trabalho de coleta, interpretação e organização das informações produzimos utilizando o software educacional “Geogebra” três grafos representativos de regiões consideradas estratégicas, em nosso estado para que de posse dessas informações efetuássemos a análise da conexidade e a conectividade do sistema de subdistribuição de energia elétrica no estado de Sergipe.

Deve-se ressaltar que em nosso modelo matemático estamos cientes que tratam-se de uma boa aproximação com estimativas próximas da realidade, visto que, não basta existir uma linha de transmissão entre duas subestações (SE)¹³, pois o sentido

¹²Em nosso trabalho optamos por fazer uma abordagem introdutória da confiabilidade de um sistema complexo, no caso a rede de distribuição elétrica em Sergipe. Para uma visão mais aprofundada sobre o tema sugerimos consultar o artigo “Redes Complexas e suas aplicações”, Paulo Alexandre de Castro¹, Nilton Luis Moreira¹, Petrus Henrique Ribeiro dos Anjos¹, Rodrigo Ferreira Marinho¹, Eliton Donizete de Souza¹ e Rodrigo Pedra Brum².

1. Departamento de Física, Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás - UFG.

2. Faculdade de Informática e Administração Paulista - FIAP

¹³Em nosso trabalho ao denominarmos uma subestação, essa será representada pelas iniciais SE.

de fornecimento da energia é pré-estabelecido (em nossos estudos evitamos trabalhar com grafos orientados).

Nos problemas a seguir, iremos determinar a conectividade e o ponto de vulnerabilidade dos sistemas de subdistribuição de energia elétrica:

- 1- Na cidade de Aracaju - por ser a capital do estado;
- 2- Nas cidades da região Agreste e sertão do estado.

Como atividade proposta para os alunos faremos uma análise conjunta de uma das mais importantes regiões do estado, denominada Vale do Cotinguiba e Região Sul que englobam, entre outras as cidades de Capela, Siriri, Carmópolis e Santo Amaro das Brotas - por serem detentoras de importantes complexos de extração de petróleo e potássio, tendo assim PETROBRAS e VALE, como importantes consumidores de energia além do PORTO DE SERGIPE, fundamental para escoar parte da produção sergipana.

A conectividade de arestas do grafo que representa a rede de distribuição - subdistribuição de energia elétrica é o número mínimo de linhas de transmissão (arestas) que danificadas, impedem as subestações de se comunicarem, i.e, transmitir - receber a energia esperada.

A conectividade de vértices representa o número de subestações que podem ser danificadas sem que haja perda da transmissão de energia elétrica entre elas.

Para se evitar os chamados apagões, é conveniente que haja rotas alternativas entre duas subestações ou que haja linhas de transmissão paralelas (arestas - paralelas) pois é imprescindível que num sistema de distribuição - subdistribuição de energia elétrica a energia requerida continue a ser fornecida, mesmo que alguma linha de transmissão seja danificada (ou que necessite de reparo ou manutenção preventiva), assim como, se uma subestação num caminho entre outras duas subestações falhar (ou necessitar de reparo) deve haver também um caminho alternativo entre essas duas subestações, que podem ser em termos práticos: linhas de transmissão em paralelo (arestas em paralelo) ou a construção de novas subestações, promovendo assim novas linhas de transmissão com maior segurança.

Quando uma subestação falha, em teoria dos grafos temos o equivalente à uma excisão (retirada) de vértice e nesse caso removem-se também as arestas incidentes, que equivalem na presente análise às linhas de transmissão, havendo apagão no sistema, ou seja, o grafo equivalente torna-se desconexo, caso não haja rotas alternativas.

Quando uma linha de transmissão falha, dizemos que houve uma excisão de arestas, preservando-se nesses casos as subestações (vértices), também provocando apagão, caso não existam rotas alternativas.

É importante ressaltar que na análise sobre a minimização de impactos no fornecimento de Energia devem ser levados em consideração os elevadíssimos custos que a construção de novas linhas de transmissão ou subestações possuem além de possíveis inviabilidades técnicas que possam limitar tais melhorias no sistema. Os órgãos reguladores ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica) e ONS (Operador Nacional do Sistema) promovem um intenso estudo para verificar em qual localidade é mais viável possuir linhas de transmissão de segurança ou subestações adicionais.

Nos dois exemplos analisados a seguir, iremos avaliar a rede de subdistribuição elétrica, utilizando alguns dos conceitos anteriormente abordados.

Exemplo 1.4.1. A representação abaixo (em escala real) mostra a rede de subestações na cidade de Aracaju e as conexões existentes entre as mesmas.

Determine a conectividade do sistema e identifique os pontos vulneráveis, pontes e ciclos. Os vértices representam as subestações de transmissão e as arestas, representam as linhas entre as subestações. Verifique situações em que ocorrerá um apagão.

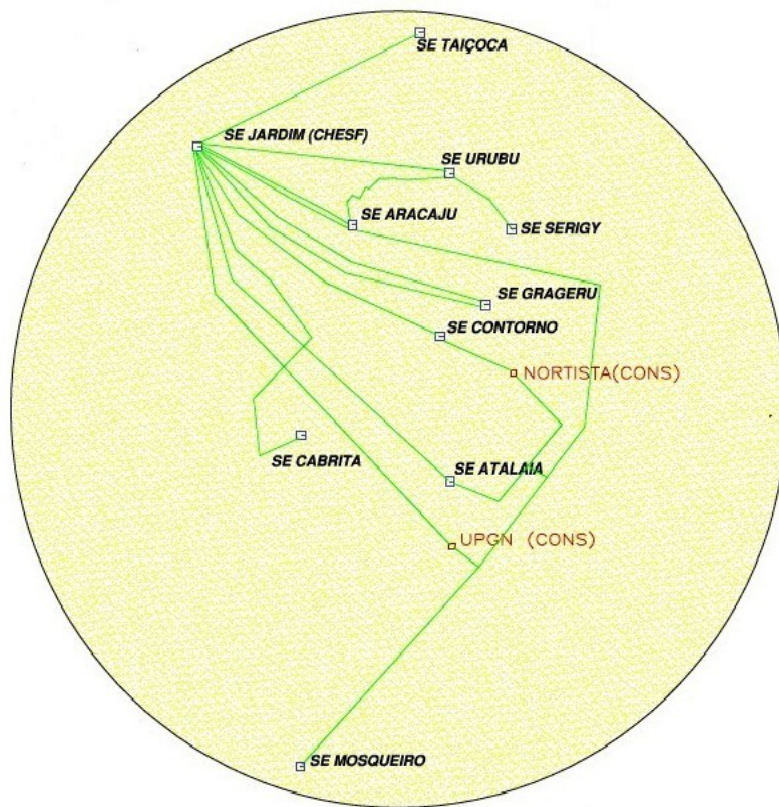


Figura 1.44: Linhas de transmissão e subestações na cidade de Aracaju

No mapa 1.44 temos representadas 10 subestações (Jardim, Taíçoca, Urubu, Aracaju, Serigy, Grageru, Contorno, Atalaia, Cabrita e Mosqueiro) além de duas que ainda entrarão em operação (UPGN e Nortista) pois estão em construção, além das linhas de transmissão existentes entre as mesmas.

Do ponto de vista estritamente matemático, temos um grafo conexo, pois existe um caminho (elétrico) que une quaisquer dois vértices (subestações).

A subestação Jardim é o ponto vulnerável do sistema distribuidor, pois é a responsável pelo fornecimento total da carga elétrica na cidade de Aracaju e ocorrendo uma falha nesta subestação (vértice) teremos um apagão. A subestação Jardim recebe

energia através de uma linha de transmissão de 500 kVA¹⁴ da Usina Hidrelétrica de Xingó (Alagoas-Sergipe) e 230 kVA da Usina Hidrelétrica de Paulo Afonso (Bahia). A subestação Jardim retransmite a energia para as demais subestações de Aracaju a 69 kVA, que a partir de então retransmitem a 13.8 kVA aos bairros atendidos. Portanto se esta subestação (vértice) falhar teremos um apagão em Aracaju.

A empresa ENERGISA nos disponibilizou a informação de que haverá a construção de uma nova subestação denominada SE ARACAJU, para justamente evitar que toda a carga hoje concentrada na subestação Jardim, venha a ser redistribuída para esta nova subestação.

Observa-se no mapa que as subestações (vértices) mais “protegidas” são SE ARACAJU (pois é suprida por 3 linhas de transmissão, sendo uma de outra subestação - a SE URUBU) e SE GRAGERU (pois é suprida por duas linhas de transmissão). No caso da SE ARACAJU, podemos afirmar que se as duas linhas de transmissão (arestas em paralelo) oriundas da SE JARDIM falharem teremos uma transferência de carga da SE URUBU e assim temos então um ciclo, como é denominado em teoria dos grafos, ou seja, uma espécie de linha de segurança.

As arestas representadas por SE JARDIM - SE TAIÇOCA, SE JARDIM - SE CABRITA e SE URUBU - SE SERIGY, se falharem desconectam parte do sistema, no caso há um apagão localizado. A aresta (no caso a linha de transmissão) que possui tal propriedade é denominada ponte em teoria dos grafos.

Como era de se esperar temos um grafo 1-conexo, visto que como mencionado anteriormente é extremamente caro a ampliação do sistema de distribuição de energia elétrica.

¹⁴Voltampere (VA) é uma potência aparente (teórica) resultante da soma vetorial entre watts (potência ativa) e var (potência reativa). O watt é o que gera o trabalho da energia em si, enquanto o var é a unidade de magnetização e de capacidade do aparelho elétrico como um gerador de energia. A soma destas duas potências, ativa e reativa, é justamente o kVA. A grandeza do kVA é relevante para o dimensionamento dos sistemas elétricos.

Exemplo 1.4.2. A representação abaixo mostra a rede de subestações no agreste e sertão sergipanos e as conexões existentes entre as mesmas.

Determine a conectividade do sistema e identifique os pontos vulneráveis, pontes e ciclos. Os vértices representam as subestações de transmissão e as arestas, representam as linhas entre as subestações. Verifique casos em que ocorrerá um apagão.

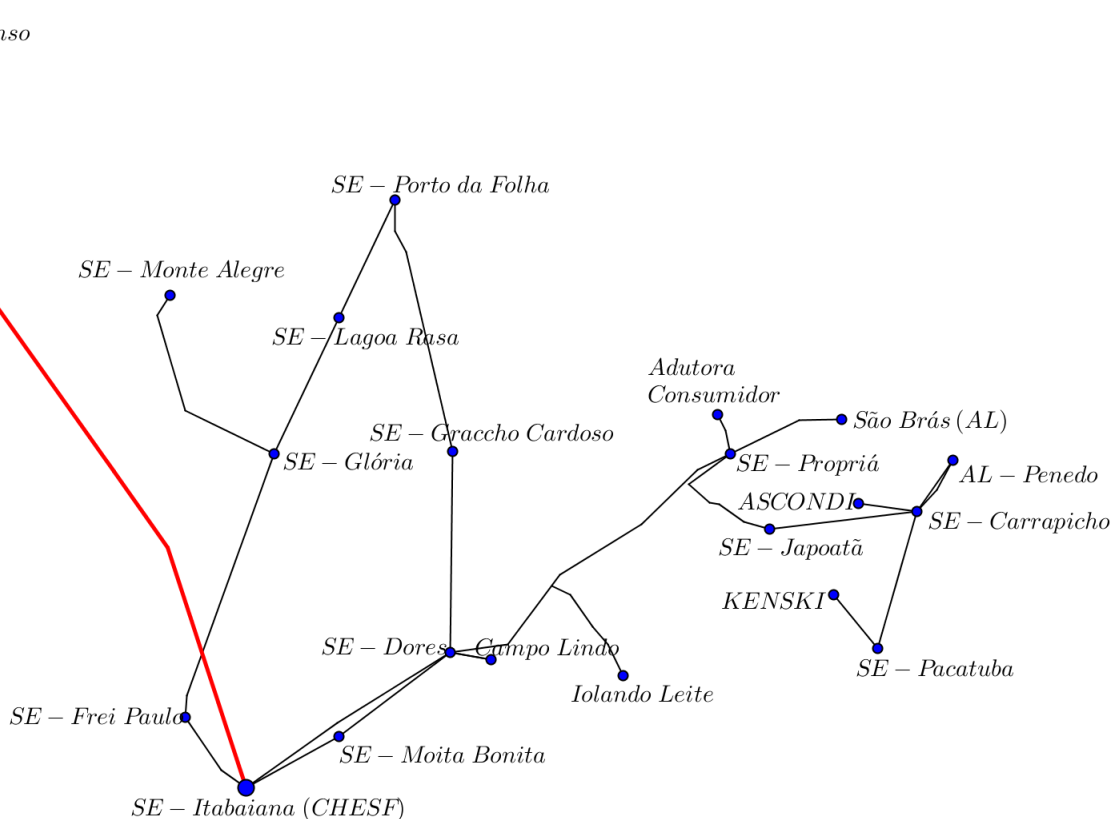


Figura 1.45: Agreste e Sertão Sergipanos

No mapa acima temos representado (em vermelho) a linha de transmissão de 230 kVA oriunda de Paulo Afonso, trazendo carga que é interligada com a subestação de Itabaiana que a partir daí retransmite (com tensão de 69 kVA) às outras 19 subestações (Frei Paulo, Glória, Lagoa Rasa, Monte Alegre, Porto da Folha, Graccho Cardoso, Dorcas, Campo Lindo, Moita Bonita, Iolando Leite, Propriá, Adutora Consumidor, São Brás (Alagoas), Japoatã, Carrapicho, Penedo (Alagoas) e Pacatuba), além de duas que ainda entrarão em operação (Ascondi e Kenski) pois estão em construção, além das linhas de transmissão existentes entre as mesmas.

Como no grafo representativo da rede de subdistribuição elétrica em Aracaju,

temos que do ponto de vista estritamente matemático, temos um grafo conexo, pois existe uma caminho (elétrico) que une quaisquer dois vértices (subestações).

A subestação Itabaiana é o ponto vulnerável do sistema distribuidor, pois é a responsável pelo fornecimento total da carga elétrica às demais subestações e ocorrendo uma falha nesta subestação (vértice) teremos um apagão. Naturalmente podemos considerar também que se houver falha no sistema gerador de energia, no caso Paulo Afonso, haverá apagão, portanto é também um ponto vulnerável e é por este motivo que há na verdade, duas linhas de transmissão em paralelo, sendo uma inoperante, atuando somente no caso de eventual problema ou manutenção preventiva nesta linha (aresta) Paulo Afonso-Itabaiana.

Observa-se no mapa que as subestações mais protegidas são SE Dores (pois é suprida por 2 linhas de transmissão (arestas em paralelo), sendo uma oriunda de Itabaiana e outra da subestação - SE Moita Bonita), além de receber carga, se necessário (o que é denominado de contingência) for da subestação (SE Graccho Cardoso) assim como a subestação SE Propriá que é suprida por duas linhas de transmissão oriundas de Itabaiana (arestas em paralelo). Percebe-se do ponto de vista matemático que as subestações - Itabaiana, Frei Paulo, Glória, Lagoa Rasa, Porto da Folha, Graccho Cardoso e Dores formam um ciclo, mas é importante frisar que existe um caminho elétrico conexo, porém não existe transmissão de energia em todos os sentidos.

As arestas representadas por SE Carrapicho - SE Pacatuba, SE Frei Paulo - SE Glória e SE Japoatã - SE Carrapicho, se falharem desconectam parte do sistema e neste caso haverá um apagão localizado. Portanto, temos nesse caso algumas pontes.

Como era de se esperar temos também um grafo 1-conexo.

Os mapas analisados anteriormente, foram confeccionados em escala real a partir do mapa a seguir que é exibido com autorização da ENERGISA.

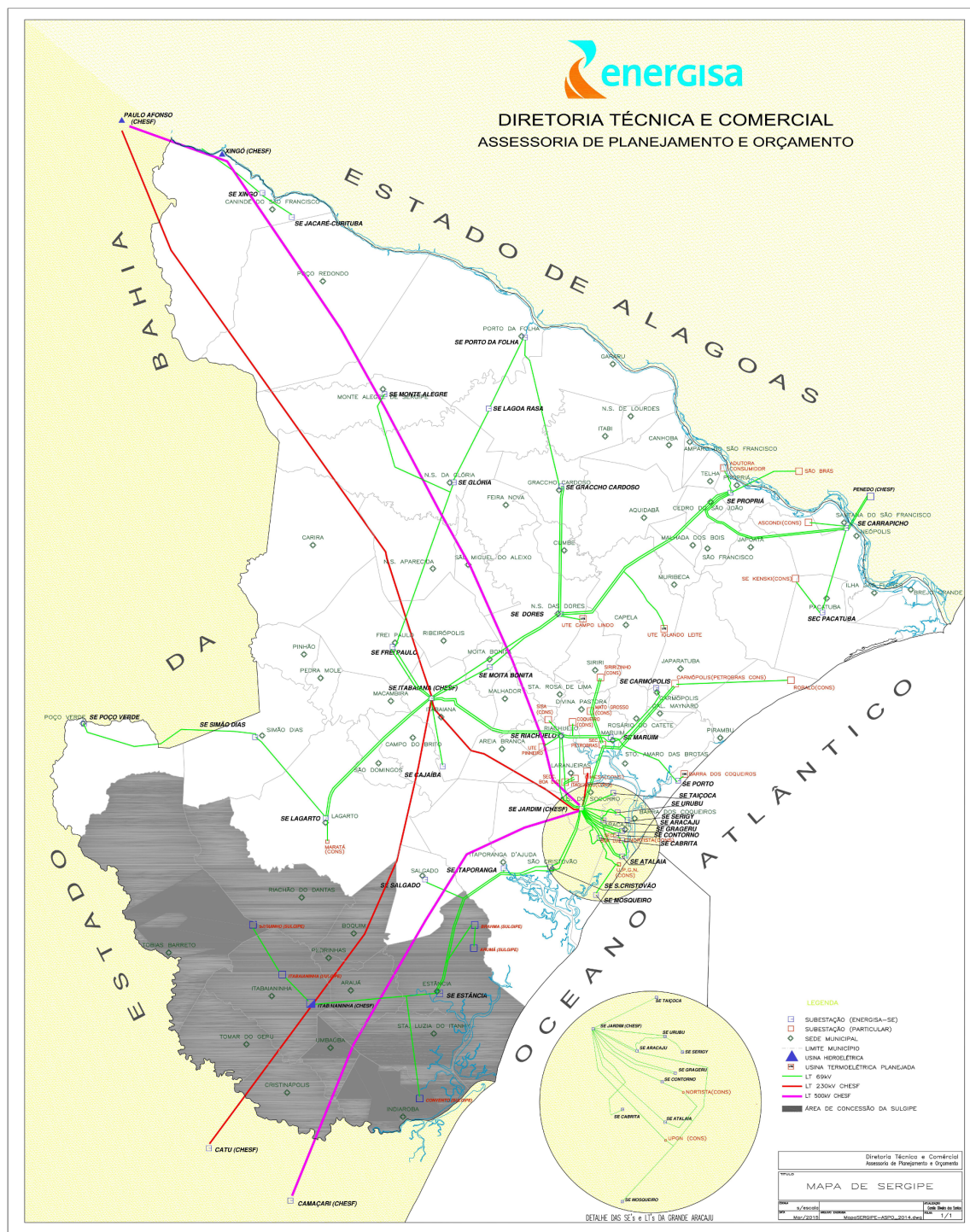


Figura 1.46: Linhas de Transmissão e Subestações no Estado de Sergipe

Capítulo 2

Os Teoremas de Menger e Festinger

Muitas vezes não basta saber se um grafo é conexo ou não. Em diversas situações de aplicação real é estritamente importante que existam alternativas de rotas (caminhos) que conectem dois pontos (vértices).

Considerando que se um grafo é conexo, verificaremos agora uma maneira de quantificar essa informação e assim, podermos avaliar até que ponto um grafo é dito mais conexo que outro e sobre isso apresentaremos o Teorema de Menger.

O teorema de Festinger nos fornecerá uma forma de determinar a quantidade de caminhos entre dois vértices e, portanto aplica-se a grafos conexos. Este último teorema mostra uma interessante aplicação do produto de matrizes, em especial, as potências de matrizes.

2.1 O Teorema de Menger

Nesta seção demonstraremos o Teorema de Menger, contudo precisaremos de dois Lemas que serão provados a seguir.

Seja V' o conjunto formado pelos pares de vértices (u, v) tais que $u \neq v$ e $uv \notin E(G)$.

Para cada $(u, v) \in V'$, definiremos $c(u, v)$ como sendo a menor quantidade de vértices distintos de u e v cuja retirada desconecta u e v e $f(u, v)$ como sendo a maior quantidade de caminhos disjuntos de u a v , isto é, não ter vértices intermediários comuns (“caminhos vértices—disjuntos”) entre u e v .

Exemplo 2.1.1. Considerando o grafo abaixo vamos determinar $c(u, v)$ e $f(u, v)$.

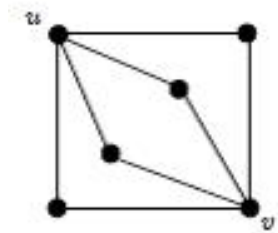


Figura 2.1: Grafo Conexos 1

No grafo acima, temos claramente que entre u e v , há quatro vértices intermediários, e cada um faz parte de um caminho que conecta u e v . Só conseguiremos desconectar u e v se remover-mos estes quatro vértices, logo, $c(u, v) = 4$. É fácil perceber também que entre u e v temos apenas quatro caminhos vértices-disjuntos e portanto $f(u, v) = 4$. \square

Provaremos agora, preliminarmente os lemas que serão necessários para a demonstração do teorema de Menger. No primeiro Lema, mostraremos que $c(u, v) = f(u, v)$ e no segundo lema mostraremos que se G é um grafo κ -conexo tal que $e \in E(G)$, então $G \setminus e$ será $(\kappa - 1)$ -conexo.

Lema 2.1.1. Usando a notação definida anteriormente, temos que $c(u, v) = f(u, v)$.

Prova. Notemos que $c(u, v) \geq f(u, v)$. De fato, todo conjunto de vértices que separa u e v tem que possuir pelo menos um vértice de cada caminho que liga u e v .

Agora, provaremos que $c(u, v) \leq f(u, v)$.

Usando indução sobre k que se $c(u, v) \geq k$ então $f(u, v) \geq k$ e, em particular, para $k = c(u, v)$, $f(u, v) \geq c(u, v)$, o que termina o problema. Iremos agora mostrar que se precisar-mos retirar pelo menos k vértices, existem pelo menos k caminhos ligando u a v .

Para $k = 1$. De fato, como $c(u, v) \geq 1$, então para separar u e v precisamos tirar pelo menos um vértice, o que quer dizer que existe pelo menos um caminho ligando u e v .

Suponha que para $k \geq 1$ temos $f(u, v) \geq k$ e $c(u, v) \geq k + 1$, ou seja, precisamos retirar pelo menos $k + 1$ vértices para separar u e v e, existem k caminhos disjuntos C_1, C_2, \dots, C_k ligando u a v . Como os k vértices vizinhos a u nesses k caminhos não separam u e v , existe um caminho C ligando u a v cujo vértice vizinho a u é diferente de todos os correspondentes em C_i . Seja x o primeiro vértice depois de v em C que pertence a algum dos C_i s, e seja C_{k+1} , à parte do caminho C de u a x . Suponha que escolhamos C_1, C_2, \dots, C_{k+1} de modo que a distância de x a v em $G - u$ é mínima (veja todas as possibilidades de escolhas de k caminhos para fazer essa escolha). Se $x = v$, conseguimos $k + 1$ caminhos e o passo de indução acaba.

Vamos supor então que $x \neq v$.

Tire x de G . Pela hipótese de indução, como ainda precisamos tirar k vértices para separar u e v , há pelo menos k caminhos D_1, D_2, \dots, D_k ligando u a v em $G \setminus x$. Suponha que a escolha dos D_i foi feita de modo a utilizar a menor quantidade possível de arestas fora dos caminhos C_i .

Seja H o grafo obtido unindo os caminhos D_i e o vértice x . Escolha um caminho C_j cuja aresta inicial não está em H . Seja y o primeiro vértice de C_j depois de u que está em H . Se $y = v$, temos $k + 1$ caminhos (D_1, \dots, D_k e C_j) e o problema acabou.

Então suponha que $y \neq v$.

Se $y = x$, seja E o menor caminho de x a v em $G \setminus u$. Seja z o primeiro vértice de E que pertence a algum D_i (se não existir z , conseguimos de novo mais um caminho juntando C_j e E). Então a distância de z a v é menor do que de x a v , o que contradiz a escolha dos C_i . Logo podemos supor que $y \neq x$. Então y está em algum caminho D_t .

Considere o caminho ligando u a y em D_t . Nem todas as suas arestas são arestas de algum C_i , por exemplo, a aresta wy em D_t , pois y está em C_j e w não, e sabemos que os caminhos C_i são disjuntos à parte de u, v e x . Agora, se trocarmos o trecho $u - y$ de D_t pelo trecho $u - y$ de C_j , obtemos k caminhos disjuntos com menos arestas fora dos C_i do que os D_i , contradição. \square

Lema 2.1.2. *Se G é um grafo κ -conexo tal que $e \in E(G)$, então $G \setminus e$ será $(\kappa - 1)$ -conexo.*

Prova. Suponha que $G \setminus e$ não é $(\kappa - 1)$ -conexo, então existe $S \subseteq V$ tal que $|S| < \kappa - 1$ e $(G \setminus e) \setminus S$ é desconexo. Assim, existem pelo menos duas componentes conexas em $(G \setminus e) \setminus S$.

Temos então, $(G \setminus S)$ conexo, logo os vértices de e não pertencem a S , $(G \setminus e) \setminus S$ só tem duas componentes conexas H_1 e H_2 . Portanto, existem $u, v \in V$ tais que $u \in H_1$, $v \in H_2$ e $e = uv$.

Caso $|H_1| = |H_2| = 1$, temos que $|G| = |S| + 2 < \kappa + 1$. Assim, podemos supor sem perda de generalidade, que $|H_2| \geq 2$. Temos que $S' = S \cup \{v\}$ desconecta G , absurdo. \square

Teorema 2.1.3. (*Menger*¹ 1927). *Um grafo é κ -conexo se, e somente se, todo par de vértices é conectado por pelo menos κ caminhos sem vértices intermediários em comum.*

Prova. Verificaremos que as afirmações abaixo são equivalentes.

- (a) G é κ -conexo;
- (b) $\kappa \leq \min \{c(u, v) | (u, v) \in V'\}$;
- (c) $\kappa \leq \min \{f(u, v) | (u, v) \in V'\}$;
- (d) Todo par de vértices é conectado por pelo menos κ caminhos sem vértices intermediários em comum.

$$(a) \Rightarrow (b)$$

Como G é κ -conexo a retirada de $\kappa - 1$ vértices de G ainda o mantém conexo. Logo,

$$\begin{aligned} \kappa - 1 &< c(u, v) && \forall (u, v) \in V' \\ \Rightarrow \kappa &\leq c(u, v) && \forall (u, v) \in V' \\ \Rightarrow \kappa &\leq \min \{c(u, v) | (u, v) \in V'\}. \end{aligned}$$

$$(b) \Rightarrow (a)$$

Suponha que G não é κ -conexo, então existe $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| < \kappa$ e $G \setminus S$ é desconexo. Como $G \setminus S$ é desconexo, existe um par de vértices u e v em $G \setminus S$ que pertencem às componentes conexas distintas de $G \setminus S$. Logo, $(u, v) \in V'$. Por hipótese,

$$c(u, v) < \kappa, \text{ assim } \kappa \leq c(u, v) < \kappa, \text{ absurdo.}$$

$$(b) \Leftrightarrow (c)$$

Pelo **Lema 2.1.1**, temos que $c(u, v) = f(u, v)$. Assim,

$$\{c(u, v) | (u, v) \in V'\} = \{f(u, v) | (u, v) \in V'\}.$$

¹Em 1930, durante uma viagem à Budapeste (Hungria) para um encontro com matemáticos, Menger já tinha lido algumas das publicações de König e durante sua visita, soube que König estava trabalhando em um livro inédito naquela época sobre a teoria dos grafos. Menger ficou satisfeito ao saber que seu teorema foi mencionado a König, que a princípio não estava convencido do feito de Menger e, na verdade não acreditava que o teorema era verdadeiro. Após um encontro entre os dois em que Menger demonstrou seu teorema, König disse que gostaria de acrescentar uma seção final em seu livro sobre o teorema, o que realmente foi feito. Esta foi uma das principais razões pela qual o teorema de Menger tornou-se tão amplamente conhecido entre os interessados em teoria dos grafos.

Portanto, (b) é equivalente a (c).

(d) \Rightarrow (c) Seja $(u, v) \in V'$. Segue de (d) que $\kappa \leq f(u, v)$.

(c) \Rightarrow (d)

Se $(u, v) \in V'$, então (d) é verdadeiro para (u, v) . Caso $(u, v) \notin V'$, então $e = uv \in E(G)$.

Considere $G' = G \setminus e$. Pelo **Lema 2.1.2**, temos que G' é $(\kappa - 1)$ -conexo. Como $uv \notin E(G \setminus e)$ assim existem $(\kappa - 1)$ caminhos vértices-disjuntos.

Logo, G possui κ caminhos vértices-disjuntos, pois $e = uv$ é um caminho. \square

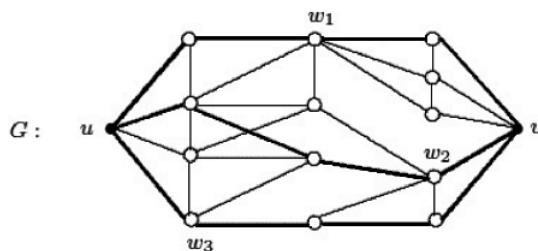


Figura 2.2: Ilustração do Teorema de Menger
Fonte: [2]

Teorema 2.1.4. (Menger para arestas). *Um grafo é dito κ -arestas conexo se a retirada de menos de κ arestas do grafo o mantém conexo. Então um grafo é κ -aresta-conexo se, e somente se, para todo par de vértices de u e v , existem κ caminhos que ligam u e v sem arestas em comum.*

Prova. Considere o grafo linha de G , $L(G)$, que é o grafo cujos vértices são as arestas de G e ligamos duas arestas se elas têm um vértice em comum (imagine que o vértice comum vira uma aresta). Aplicando o teorema de Menger para esse grafo conclui-se a demonstração. \square

2.2 Contando caminhos entre vértices - Teorema de Festinger

O número de caminhos entre dois vértices em um grafo pode ser determinado usando sua matriz de adjacência.

Teorema 2.2.1. Teorema de Festinger². *Seja G um grafo com matriz de adjacência \mathbf{A} com relação à ordem v_1, v_2, \dots, v_n (com arestas orientadas ou não orientadas, e com arestas múltiplas e laços permitidos). O número de caminhos diferentes de comprimento r de v_i a v_j , em que r é um inteiro positivo, é igual ao elemento (i, j) de \mathbf{A}^r .*

Prova. O teorema será demonstrado usando indução sobre r . Seja G um grafo com matriz de adjacência \mathbf{A} (considerando uma ordem v_1, v_2, \dots, v_n dos vértices de G). O número de caminhos de v_i a v_j de comprimento 1 é o elemento (i, j) de \mathbf{A} , pois este elemento é o número de arestas de v_i para v_j .

Suponha que o elemento (i, j) de \mathbf{A}^r seja o número de caminhos diferentes de comprimento r de v_i a v_j . Esta é a hipótese de indução. Como $\mathbf{A}^{r+1} = \mathbf{A}^r \mathbf{A}$, o elemento (i, j) de \mathbf{A}^{r+1} é igual a

$$b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj}$$

em que b_{ik} é o elemento (i, k) de \mathbf{A}^r . Pela hipótese de indução, b_{ik} é o número de caminhos de comprimento r de v_i a v_k .

Um caminho de comprimento $r + 1$ de v_i a v_j é formado de um caminho de comprimento r de v_i a algum vértice intermediário v_k e de uma aresta de v_k a v_j . Pela regra do produto para contagem, o número de tais caminhos é o produto do número de caminhos de comprimento r de v_i a v_k , ou seja, b_{ik} , e o número de arestas de v_k a v_j , ou seja, a_{kj} . Quando estes produtos são somados para todos os possíveis vértices intermediários v_k , o resultado desejado é obtido pela regra da soma para contagem. \square

²Leon Festinger - (1919 - 1989) foi um psicólogo americano. Embora o Teorema leve este nome, sua prova deve-se provavelmente a **Harary**. Festinger tornou-se famoso pelo desenvolvimento da Teoria da Dissonância Cognitiva. Enquanto lecionou na Universidade de Michigan fez contato com Frank Harary (renomado matemático americano, considerado um dos pais da moderna Teoria dos Grafos) em busca de ajuda, a fim de explorar técnicas matemáticas para as ciências comportamentais. Publicou “A análise de sociogramas usando álgebra matricial” (1949).

Exemplo 2.2.1. Quantos caminhos de comprimento quatro existem de a a d no grafo simples G da figura abaixo?

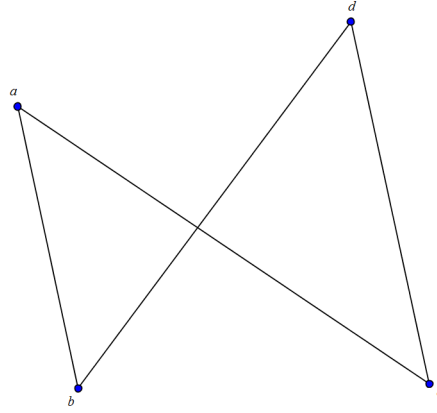


Figura 2.3: O grafo G

Solução: A matriz de adjacência de G (ordenando os vértices como a, b, c, d) é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o número de caminhos de comprimento quatro de a a d é o elemento $(1, 4)$ de \mathbf{A}^4 .

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

Como existem exatamente oito caminhos de comprimento quatro de a a d . Por inspeção do grafo, vemos que a, b, a, b, d ; a, b, a, c, d ; a, b, d, b, d ; a, b, d, c, d ; a, c, a, b, d ; a, c, a, c, d ; a, c, d, b, d ; e a, c, d, c, d ; são os oito caminhos de a a d .

A contagem segundo o teorema de Festinger inclui os caminhos **não elementares**, ou seja, ocorre repetição de arestas, visto que a regra de concatenação não impõe

qualquer restrição à formação de subestruturas, desde que sejam sequenciais. A contagem restrita a caminhos elementares é um problema de maior dificuldade³.

O teorema de Festinger pode ser usado para encontrar o comprimento do menor caminho entre dois vértices de um grafo e também pode ser usado para determinar se um grafo é conexo. Neste último caso um grafo G será conexo se, e somente se, todo elemento fora da diagonal de $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots + \mathbf{A}^{n-1}$ for positivo, em que \mathbf{A} é a matriz de adjacência de G .

³Os matemáticos Evans, Ross e Harary, apresentaram técnicas com essa finalidade em “*On the computer enumerations of finite topologies*”(1967) e “*On the determination of redundancies in sociometric chains. Psychometrika*”(1952)

Capítulo 3

Contextualizando em sala de aula

3.1 Uma prática concebível: Noções de Grafos no Ensino Médio

Apresentamos neste último capítulo uma produção de sequências didáticas que foram reproduzidas no âmbito do Colégio Estadual Senador José Alves do Nascimento, localizado na cidade de Aracaju, estado de Sergipe. Faremos um breve relato das experiências adquiridas na ministração destas oficinas oferecidas aos alunos do Ensino Médio.

Uma das justificativas para a inclusão do assunto grafos no ensino médio está relacionado à sua capacidade de articular conhecimento matemático às questões tecnológicas. A articulação da matemática ensinada no ensino médio com temas atuais da ciência e da tecnologia tem sido amplamente defendida. Os problemas tratados neste trabalho, utilizando grafos, tais, como, o problema das pontes de Königsberg, da conexidade entre subestações de energia elétrica, apontam para essa articulação. O documento do MEC denominado - “Orientações Curriculares para o Ensino Médio”, inclusive, traz recomendações sobre a exploração de problemas.

Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola - são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler... Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo como no exemplo, um diagrama em

que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução... Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo de uma cidade. (BRASIL, 2006, p. 94)

A teoria dos grafos também permite a interligação de assuntos normalmente separados no ensino médio: análise combinatória e matrizes, o que contribui para diminuir a visão compartimentada da matemática na apresentação de seus conteúdos. O teorema de Festinger mostra uma interessante aplicação do produto de matrizes, especificamente, as potências de matrizes. A introdução da teoria dos grafos no ensino médio é apresentada neste trabalho como uma ferramenta bastante útil para nos mostrar o quanto um determinado “sistema” modelado via teoria dos grafos é conexo, contribuindo assim para identificar-mos a vulnerabilidade do sistema.

O ensino de grafos também contempla uma das finalidades do ensino médio, apresentadas no art. 35 da LDB¹

III- a compreensão dos fundamentos científicos e tecnológicos nos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

De fato, o inciso III do art. 35, o ensino de grafos colaboram para que esta correlação teoria-prática da finalidade acima descrita seja atingida.

Reforçamos que este trabalho tem um caráter meramente introdutório à teoria dos grafos, mais especificamente o tema conexidade. Estamos certos de que os assuntos de teoria dos grafos aqui tratados e aplicados não permitirão ao aluno mais aplicado resolver um problema real de roteamento de transporte, ou conexidade numa rede, mas o permitirão entender os princípios básicos que um profissional da área utilizaria na resolução do problema real.

3.2 Oficinas e Material didático sobre grafos para alunos

As atividades propostas a seguir, tinham um tempo limitado de 50 minutos para cada uma, sendo que numa oficina anterior foram previamente expostos os conhecimentos básicos sobre teoria dos grafos com duração aproximada de 90 minutos. As atividades foram apresentadas através de fichas previamente preparadas, que consistiam em exercícios aplicados à teoria apresentada. A atividade referente ao Teorema

¹Lei n. 9.394/96 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Art.35.

de Menger, tinha caráter investigativo e instigava os alunos a elaboração de conjecturas.

Cada atividade era explicada de forma minuciosa, de modo que cada aluno da turma tivesse a oportunidade de entender o sentido da tarefa proposta e o que dele se esperava no decorrer da atividade. As dúvidas eram constantes, mas a troca de informações entre professor e entre os alunos que possuíam mais afinidade com o assunto, ajudaram a esclarecer as dúvidas surgidas. Próximo do encerramento de cada atividade, os grupos formados eram convidados a exporem suas respostas, que em alguns casos se apresentaram de diferentes formas, assim como as justificativas.

É importante ressaltar que a organização e sistematização dos conteúdos abordados durante as oficinas e principalmente após a exposição dos alunos, eram debatidos, finalizando assim cada encontro.

Foram reservados dois encontros posteriores para a utilização de ferramentas de software online. No site [http : //www.m3.ime.unicamp.br/](http://www.m3.ime.unicamp.br/) que é um portal de recursos educacionais multimídia, mantido pela Universidade Estadual de Campinas, desenvolvidos pela própria instituição com financiamento do FNDE, SED, MCT e MEC para o Ensino Médio de Matemática no Brasil. Lá podemos encontrar duas ferramentas interessantíssimas que exploram grafos: A primeira denominada “**Aviões e Matrizes**” em que se pode ter contato com uma aplicação direta de teoria dos grafos em resolver três problemas, que representam desafios reais quando se discute a alocação de voos e a construção de aeroportos, e a segunda “**Grafos e Matrizes**”, onde este software é capaz de exibir dinamicamente a matriz de adjacência, suas potências e somas de potências, de um grafo montado pelo usuário. Neste dois softwares são discutidos os temas Matriz de Adjacência de um Grafo, e o teorema de Festinger. Outro site bastante útil, porém disponível em inglês, apoiada pelo NCTM² é [http : //illuminations.nctm.org](http://illuminations.nctm.org), onde se pode buscar a ferramenta “**Graph Creator**” e criar grafos e investigar conceitos como grafos planares, grafos completos, árvores geradoras de custo mínimo além de verificar a existência de caminhos Eulerianos ou Hamiltonianos.

Na atividade 1 pretendemos mostrar a correlação entre a quantidade de arestas de um grafo e a soma dos graus de cada vértice (Teorema de Euler). Com essa atividade, instigamos o aluno a procurar o padrão de regularidade (a soma dos graus de um grafo corresponde ao dobro do número de arestas) e assim enunciar e demonstrar o referido teorema. O aluno deverá perceber também que a quantidade de vértices de grau ímpar será sempre par.

Na atividade 2, temos como objetivo mostrar o conceito de Grafos Eulerianos e Hamiltonianos, além de introduzir o conceito de conexidade. O aluno verificará que os grafos eulerianos e os grafos hamiltonianos são ambos conexos. O aluno será instigado com esta atividade a perceber também que num grafo conexo euleriano o

²NCTM(National Council of Teachers of Mathematics- Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos). O NCTM serve como um parceiro de conteúdo on-line gratuito de aprendizagem, onde o portal “Illuminations” é o principal contribuinte de recursos para o ensino e aprendizagem da matemática para pré adolescentes.

grau de qualquer um de seus vértices será sempre par.

Na atividade 3, iremos introduzir o conceito de matriz de adjacência de um grafo e aplicar o Teorema de Festinger, como sendo útil na multiplicação de matrizes. Buscaremos também encontrar o significado da matriz A^k , que nos fornece o número de caminhos de comprimento k entre cada par de vértices de um grafo.

Finalizaremos a atividade 3, questionando aos alunos se é válida a seguinte proposição: Um grafo G será conexo se e somente se todo elemento fora da diagonal de $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots + \mathbf{A}^{n-1}$ for positivo, em que \mathbf{A} é a matriz de adjacência de G . Nosso objetivo é conduzir a realmente validar a proposição.

Na atividade 4, finalmente abordaremos de forma direta a conectividade de grafos, explorando assim o conceito inicial do Teorema de Menger.

Na atividade 5, abordaremos a conectividade de grafos completos, onde após os alunos tentarem encontrar a conectividade na “força bruta”, abordaremos que isto pode ser determinado diretamente através de $\kappa(K_n) = n - 1$.

Na atividade 6, introduziremos o conceito de grafo complementar. Verificaremos a conexidade de tais grafos e mais uma vez os alunos serão questionados a investigarem a validação de uma proposição, desta vez sobre a conexidade de grafos complementares: Se G é desconexo então \overline{G} é conexo.

Finalizaremos essa sequência didática com a atividade 7 em que propomos aos alunos além de explorarem conceitos sobre grafos, a efetuarem uma análise da conectividade de um mapa de subdistribuição de energia elétrica referente à região do Vale do Cotinguiba e região sul do estado de Sergipe. Essa atividade, naturalmente demandará mais tempo pois envolve conceitos da malha elétrica em nosso estado.

A percepção de regularidades e padrões em matemática é colocada em evidência nestas atividades, fazendo com que desperte no aluno o interesse e o gosto em buscar entender tais padrões, melhorando e aperfeiçoando assim o entendimento do que é “fazer matemática”.

É importante ressaltar que na medida do possível os teoremas e proposições enunciados foram demonstrados, sempre no encerramento das sequências didáticas propostas.

Dentre todas as atividades abordadas, a que foi considerada mais atrativa pelos alunos foi a Atividade 1 - Teorema de Euler. Todos os alunos participaram e estavam muito motivados. Esta atividade também foi considerada a mais simples dentre todas que foram aplicadas. A atividade 7, que compreendia uma análise da rede de subdistribuição de energia elétrica no estado de Sergipe (particularmente na região que concentra um razoável número de indústrias), também foi muito atraente, pois envolvia uma aplicação prática da teoria dos grafos. A atividade em que os alunos tiveram um grau moderado de dificuldade foi a referente à identificação dos Grafos Eulerianos e Hamiltonianos (Atividade 2). As questões que envolviam uma análise mais aprofundada acerca da percepção de padrões eram as que foram consideradas mais difíceis pelos alunos. Podemos citar a questão 2 da atividade 5 (O que você percebeu ao calcular κ ?), onde nenhum aluno acertou, contrariando nossas expectativas iniciais.

Nosso objetivo com a inserção de atividades com o tema conexidade é instigar os alunos a “construirm” matemática, percebendo que tais padrões existentes podem e devem ser estudados e devidamente teorizados.

As sete atividades produzidas e aplicadas em sala de aula encontram-se reproduzidas nas páginas a seguir.

Colégio Estadual Sen. José Alves do Nascimento

Disciplina: Matemática

Profº: Marcos Barbosa

Aluno (a): _____

Série: 2º Ano

Turma: _____

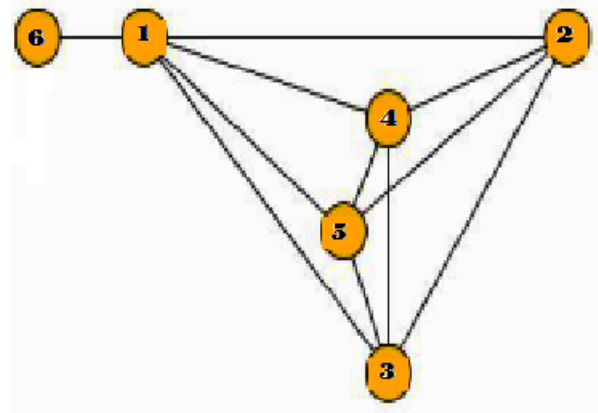
Data: ____/____/2015

Introdução à Teoria dos Grafos (Atividade 1 - Teorema de Euler)

- 1- Para cada grafo situado à direita de cada tabela, determine o grau de cada vértice, a soma de todos estes graus, o total de arestas, além de verificar o total de vértices de grau par e o total de vértices de grau ímpar.

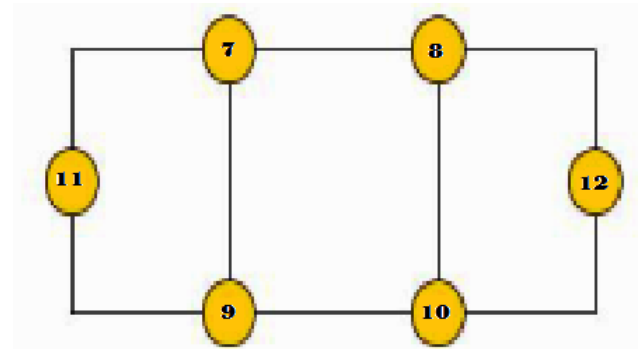
a)

VÉRTICES	GRAU
1	
2	
3	
4	
5	
6	
SOMA DOS GRAUS	
	TOTAL
TOTAL DE ARESTAS	
VÉRTICES DE GRAU ÍMPAR	
VÉRTICES DE GRAU PAR	



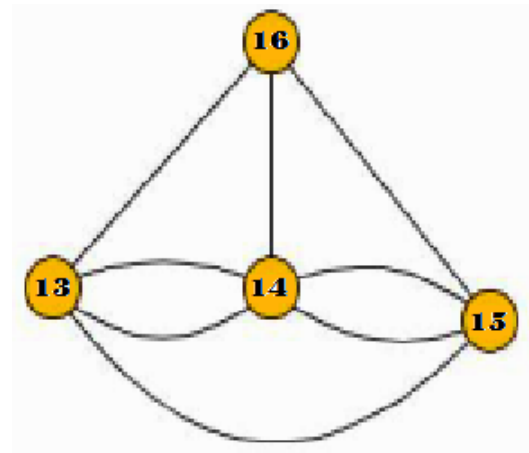
b)

VÉRTICES	GRAU
7	
8	
9	
10	
11	
12	
SOMA DOS GRAUS	
	TOTAL
TOTAL DE ARESTAS	
VÉRTICES DE GRAU ÍMPAR	
VÉRTICES DE GRAU PAR	



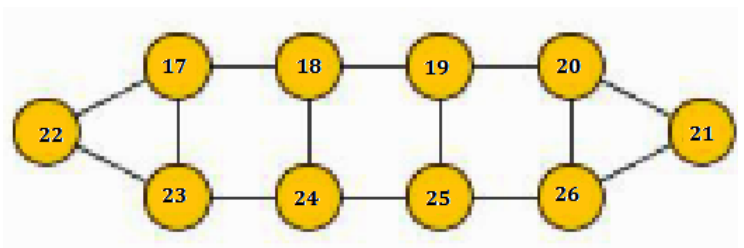
c)

VÉRTICES	GRAU
13	
14	
15	
16	
SOMA DOS GRAUS	
	TOTAL
TOTAL DE ARESTAS	
VÉRTICES DE GRAU ÍMPAR	
VÉRTICES DE GRAU PAR	



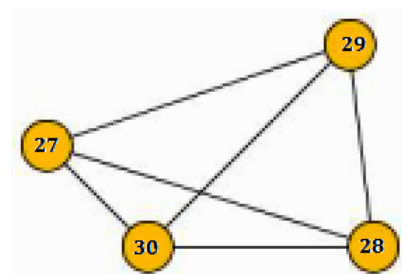
d)

VÉRTICES	GRAU
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
SOMA DOS GRAUS	
	TOTAL
TOTAL DE ARESTAS	
VÉRTICES DE GRAU ÍMPAR	
VÉRTICES DE GRAU PAR	



e)

VÉRTICE	GRAU
27	
28	
29	
30	
	TOTAL
TOTAL DE ARESTAS	
VÉRTICES DE GRAU ÍMPAR	
VÉRTICES DE GRAU PAR	



Colégio Estadual Sen. José Alves do Nascimento

Disciplina: Matemática

Profº: Marcos Barbosa

Aluno (a): _____

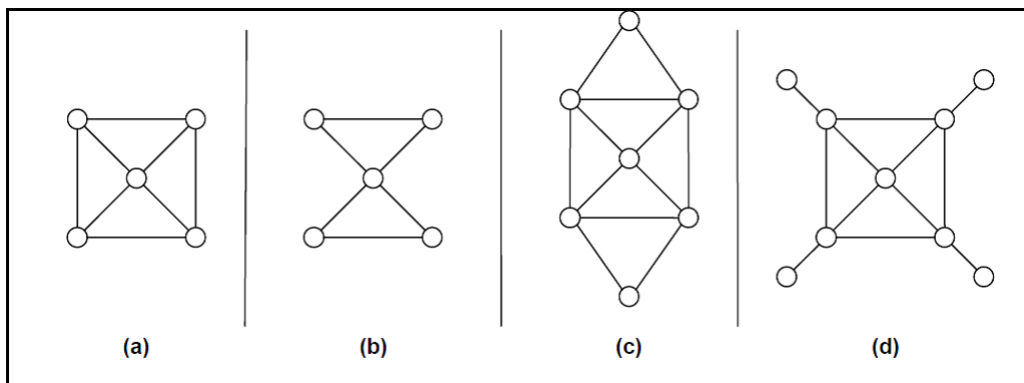
Série: 2º Ano

Turma: _____

Data: ____/____/2015

Introdução à Teoria dos Grafos no Ensino Médio (Atividade 2)

1- Considere os grafos abaixo, para responder o que se pede:



FONTE: [8]

- Quais dos grafos acima são classificados como Eulerianos? Por quê?
 - Quais dos grafos acima são classificados como Hamiltonianos? Por quê?
 - Há algum grafo que possui as duas classificações? Qual?
 - Há algum grafo que não possui nenhuma das classificações propostas? (não é nem Hamiltoniano e nem é Euleriano).
- Quais dos grafos acima você consegue “desenhá-lo” com um lápis em um movimento contínuo, sem erguê-lo ou retraçar parte da figura?
 - Todos os grafos eulerianos e hamiltonianos são conexos? A partir da análise dos grafos eulerianos vistos anteriormente construa uma tabela com os graus de seus vértices. Com base nessa construção é possível perceber algum padrão?

Colégio Estadual Sen. José Alves do Nascimento

Disciplina: Matemática

Profº: Marcos Barbosa

Aluno (a): _____

Série: 2º Ano

Turma: _____

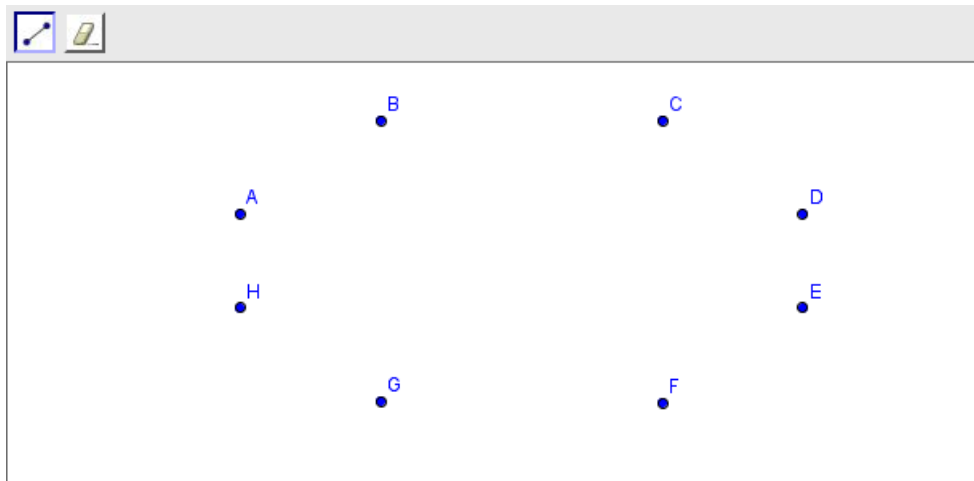
Data: ____/____/2015

Introdução à Teoria dos Grafos no Ensino Médio

(Atividade 3 - Teorema de Festinger)

Acesse o portal <http://www.m3.ime.unicamp.br>. Iremos utilizar o software “Matrizes e Aviões”. Você verificará a relação existente entre matrizes e rotas aéreas. Neste software, você verá que as matrizes podem ser utilizadas na análise e na elaboração de malhas aéreas, e que essa aplicação consiste num exemplo prático do produto de matrizes.

- 1- Construir uma malha aérea pequena, mas que ainda assim atenda às exigências de um país é um grande desafio. Tente montar a menor malha possível para um país com aeroportos em 8 cidades, e cuja forma seja tal que se possa ir de uma cidade a outra com, no máximo, 2 voos.



- a) Após responder a pergunta 1, elabore a matriz de adjacência \mathbf{A} .
 - b) Determine a matriz \mathbf{A}^2 ?
 - c) O que representam os elementos de \mathbf{A}^2 ?
- 2 - Verifique a validade da seguinte proposição: Um grafo G será conexo se e somente se todo elemento fora da diagonal de $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots + \mathbf{A}^{n-1}$ for positivo, em que \mathbf{A} é a matriz de adjacência de G .

Atividade 4 - Grafos (Conectividade e o Teorema de Menger)

- 1 - Sabemos que $c(u, v)$ é a menor quantidade de vértices diferentes de u e v cuja retirada desconecta u e v , e $f(u, v)$ é a maior quantidade de caminhos vértices-disjuntos de u a v . Vamos determinar para cada um dos grafos: $c(u, v)$ e $f(u, v)$. A partir dos resultados obtidos, o que você percebe?

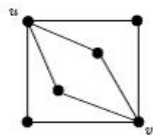


Figura 3.1: Grafo Conexão 1

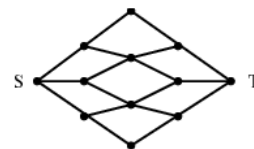


Figura 3.2: Grafo Conexão 2

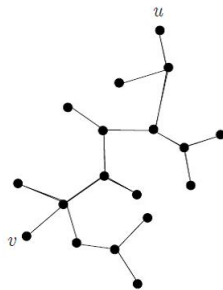


Figura 3.3: Grafo Conexão 3

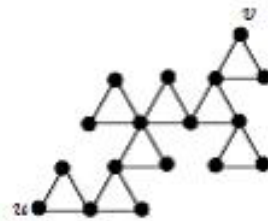


Figura 3.4: Grafo Conexão 4

- 2) Em uma cidade, uma companhia telefônica deseja substituir os cabos convencionais de sua malha por cabos de fibra ótica. Na figura a seguir, representamos uma pequena parte desta rede.

Determine : a) $c(u, v)$ e $f(u, v)$

b) $c(s, v)$ e $f(s, v)$

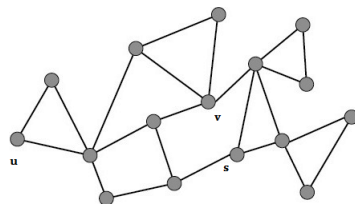


Figura 3.5: Malha Telefônica

Colégio Estadual Sen. José Alves do Nascimento

Disciplina: Matemática

Profº: Marcos Barbosa

Aluno (a): _____

Série: 2º Ano

Turma: _____

Data: ____/____/2015

Introdução à Teoria dos Grafos no Ensino Médio (Atividade 5)

1- Considere os grafos abaixo, para responder o que se pede:

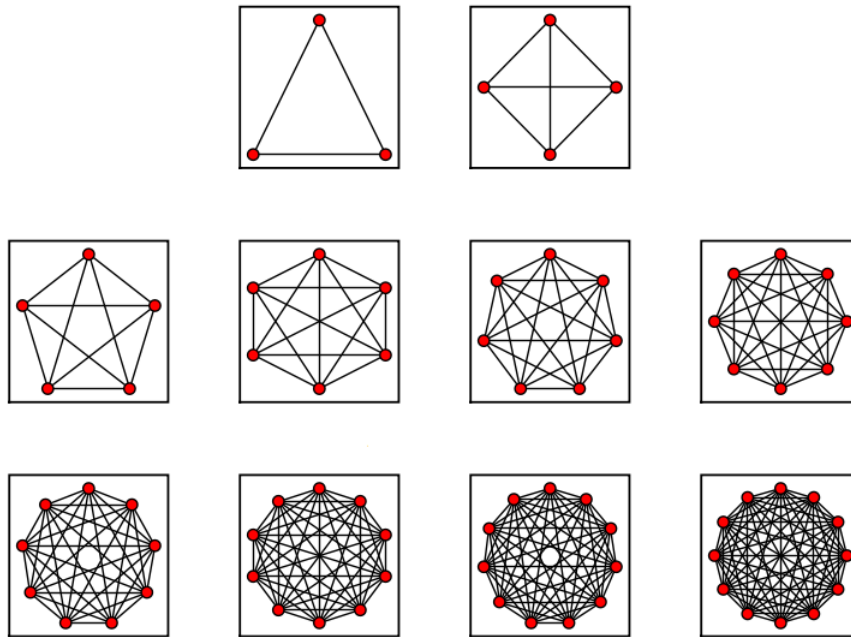


Figura 3.6: Grafos Completos

- Os grafos acima representados, possuem alguma(s) característica(s) em comum? Qual(is) característica(s) é(são) essa(s)?
 - Determine a conectividade de cada grafo.
- 2) O que você percebeu ao calcular κ ?

Atividade 6 - Grafos (Grafo complementar, Conectividade e o Teorema de Menger)

1 - Considere cada grafo G . Determine para cada um seu complemento \overline{G} .

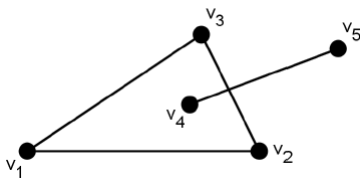


Figura 3.7: Grafo 1

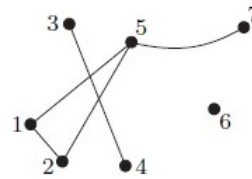


Figura 3.8: Grafo 2

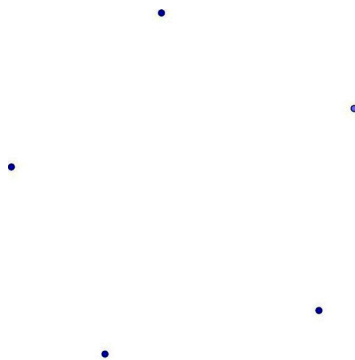


Figura 3.9: Grafo 3



Figura 3.10: Grafo 4

- Os grafos acima representados, possuem alguma(s) característica(s) em comum? Qual(is) característica(s) é(são) essa(s)?
- Determine a conectividade κ de cada grafo G .
- Após obter os grafos complementares solicitados, o que se pode observar de comum a todos eles?
- Determine a conectividade κ em cada grafo \overline{G} .
- Sobre o resultado obtido no item (c), será que a recíproca é verdadeira?

Colégio Estadual Sen. José Alves do Nascimento

Disciplina: Matemática

Profº: Marcos Barbosa

Aluno (a): _____

Série: 2º Ano

Turma: _____

Data: ____/____/2015

Introdução à Teoria dos Grafos no Ensino Médio (Atividade 7)

- 1- A representação abaixo mostra a rede de Subestações na Região das cidades de Riachuelo, Capela, Siriri, Santo Amaro, Estância entre outras cidades Sergipanas, num núcleo onde se concentram instalações industriais importantes, como as empresas Vale e campos produtores de petróleo além do Porto de Sergipe, onde boa parte da produção é exportada, além das cidades de Estância, onde se localiza a fábrica da Brahma, entre outras indústrias.

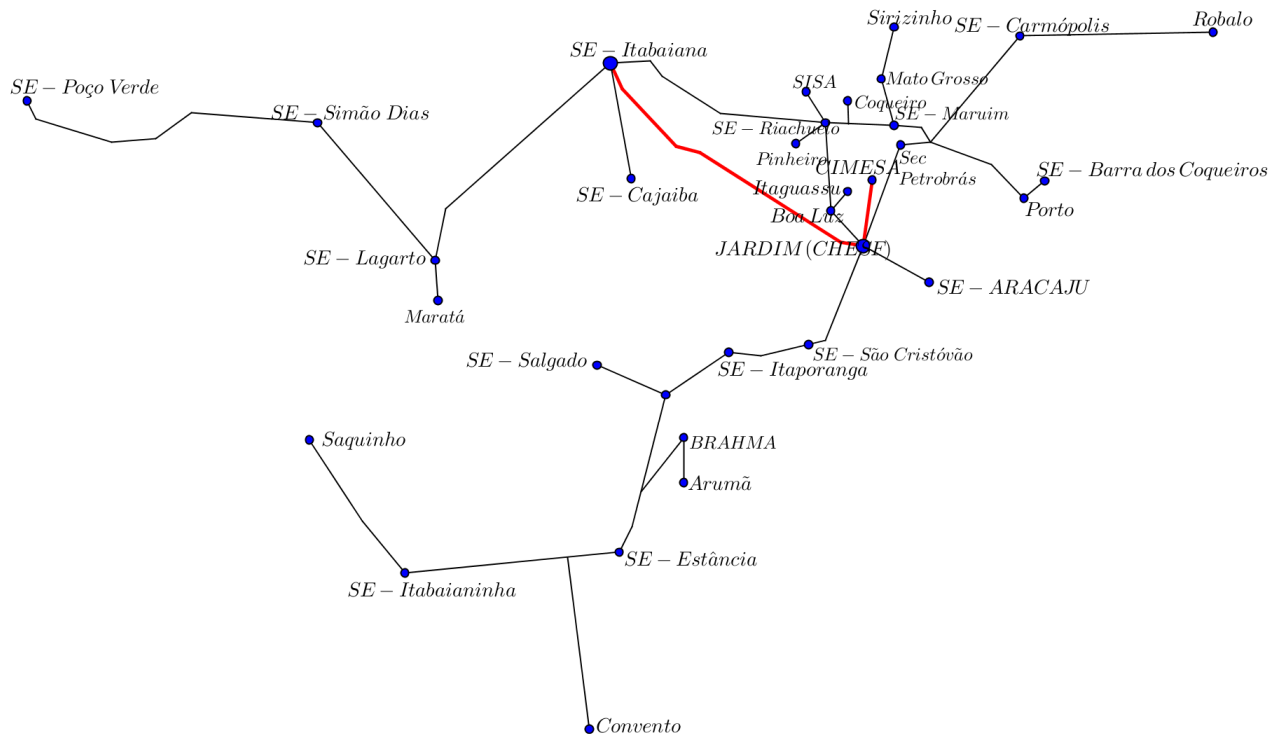


Figura 3.11: Indústrias

Determinar a conectividade do sistema e identifique os pontos vulneráveis, pontes e ciclos. Os vértices representam as subestações de transmissão e as arestas, representam as linhas entre as subestações. Verifique casos em que ocorrerá um apagão.

Considerações Finais

Apresentamos no decorrer deste trabalho diferentes possibilidades de abordagem de um dos temas centrais em teoria dos grafos: Conectividade. Após uma abordagem introdutória sobre aspectos históricos quanto conceituais, descrevemos seis atividades para serem realizadas com alunos do ensino médio que englobam estas possibilidades.

Em virtude de tudo que foi aqui mencionado, compreendemos a importância da teoria dos Grafos como primordial na Matemática contemporânea. É fato que não trata-se de um tema trivial, e que ainda existem muitas outras formas de abordagem. Optamos por uma abordagem inicial, intuitiva e prática, mas sem esquecer de fazer generalizações e sistematização da teoria, sempre que possível.

Em nossa proposta de intervenção junto aos alunos do ensino médio do Colégio Estadual Senador José Alves do Nascimento na cidade de Aracaju, Sergipe, percebemos que o referido tema destacou-se como motivador e “atraente”, vislumbrando ser uma aplicação prática da matemática.

Durante o decorrer das oficinas ministradas, o diálogo sobre o tema “grafos” mostrou variados problemas com enunciado simples, porém escondendo, muitas vezes, uma sofisticada estrutura matemática. Durante a exposição da análise da aplicação destes conceitos na rede de subdistribuição elétrica do estado de Sergipe, ficou claro que tais conceitos são extremamente úteis na elaboração da malha energética (no caso estudado a malha elétrica) e pode ser verificado e determinado a confiabilidade do sistema de energia (sob a ótica da conectividade) em relação a possíveis falhas num período dado. A idéia de vulnerabilidade é oposta à de conectividade, sendo bastante útil para sabotagem de um sistema.

É inegável, que a teoria possui um enorme potencial científico e educacional, e acreditamos ser possível acessá-la desde o ensino básico, conteúdos de competência universitária, neste caso a Teoria dos Grafos, visando provocar a discussão acerca do currículo de matemática. Destacamos que um currículo adequado fará diferença na qualificação dos futuros universitários, e que com certeza trará impactos positivos.

Nesta perspectiva acreditamos que este estudo acrescenta sua contribuição, no momento em que propõe atividades compatíveis com o nível médio.

Acreditamos que os resultados da atividade nos mostram um caminho favorável para a possibilidade, e potencialidade deste conteúdo ser explorado no ensino médio. Destaca-se que para isso ocorrer efetivamente, é necessário que ocorra uma profunda atenção para a formação continuada de professores de Matemática, como é o caso do PROFMAT, pois a inserção de tais temas no ensino médio, seja por meio de oficinas,

palestras, ou mesmo de uma proposta de intervenção pedagógica, terá impacto no desenvolvimento lógico e matemático de nossos alunos da educação básica.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl Benjamin. História da matemática; Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- [2] CHARTRAND, Gary; ZHANG, Ping. A first course in graphy theory. McGraw-Hill Higher Education, Boston, 2005.
- [3] DIESTEL, Reinhard. Graph theory. Graduate Texts in Mathematics Series. Springer - Verlag GmbH, 1998.
- [4] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática; tradução: Higino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- [5] JURKIEWICZ, Samuel. Grafos - Uma introdução. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [6] LAGES, Elon. Alguns problemas clássicos sobre Grafos, RPM 12, pp. 36 – 42, 1988
- [7] LEMOS, Manoel, Estruturas Discretas. Notas de Aula. Departamento de Matemática (UFPE). Recife, 2010.
- [8] MUNIZ JUNIOR, Ivail. Encontrando, minimizando e planejando percursos: uma introdução à Teoria dos grafos no ensino médio / Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2007.
- [9] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Tópicos de Matemática elementar: combinatoria. Rio de Janeiro: SBM.2012
- [10] ROSEN, Kenneth. Matemática Discreta e suas aplicações[Tradução de João Giudice]. McGraw-Hill, São Paulo, 2009.
- [11] SHINE, Carlos, Teoria dos Grafos: Conectividade. Programa Olímpico de Treinamento. IMPA. Rio de Janeiro, 2013.
- [12] SOUZA, Michel Guerra de, Possibilidades em grafos Hamiltonianos. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. Rio de Janeiro, 2014.
- [13] TAVARES, Suzana de Souza, Redes: Fluxo Máximo e Corte Mínimo. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Lisboa, 2006.